SCHAUM'S ouTlines

全美经典学习指导系列

信号与系统

〔美〕Hwei P. Hsu 著

骆丽 胡健 李哲英 译

- 涵盖全部课程基础
- 提供最有效的解题方案
- 571道精选习题及其详解
- 考研的得力助手
- 自学者的理想读物

科学出版社

麦格劳-希尔教育出版集团

(TN-0340.0101)
责任编辑：王 利 韩 博

SCHAUM'S outlines

全球销量超越3000万的
“全美经典学习指导系列”
是您的最佳学习伴侣！

40年来最畅销的教辅系列
全美著名高校资深教授倾力之作
国内重点高校任课教师全力推荐并担当翻译
省时高效的学习辅导，全面详细的习题解答
迄今为止国内最全面的教辅系列
覆盖大学理工科专业

全美经典学习指导系列

概率和统计	2000工程力学习题精解	电气工程基础
统计学	工程力学	工程电磁场基础
离散数学	3000物理习题精解	数字信号处理
Mathematica使用指南	流体动力学	数字系统导论
数理金融引论	物理学基础	数字原理
机械振动	材料力学	电机与机电学
微分方程	2000离散数学习题精解	基本电路分析
统计学原理（上）	工程热力学	信号与系统
统计学原理（下）	数值分析	微生物学
微积分	量子力学	生物化学
静力学与材料力学	有机化学习题精解	生物学
有限元分析	3000化学习题精解	分子和细胞生物学
传热学	大学化学习题精解	人体解剖与生理学
近代物理学	电路	

ISBN 7-03-009396-8
9 787030 093967 >
Mc Graw Hill
ISBN 7-03-009396-8/TN · 340
定 价：30.00 元

TN911.6
28

全美经典学习指导系列

信号与系统

〔美〕Hwei P. Hsu 著

骆 丽 胡 健 李哲英 译

科学出版社

麦格劳-希尔教育出版集团

2002

内 容 简 介

本书为全美经典学习指导系列丛书之一。

本书为大学工科基础课教学参考书。全书分为7章。第1章介绍连续时间和离散时间的信号与系统的数学描述和表示；第2章研究线性时不变（LTI）系统基本的输入-输出关系，解释系统的单位冲激响应以及卷积运算；第3、4章研究LTI系统分析中使用的变换技术；第5、6章介绍信号与系统的傅里叶（Fourier）分析；第7章介绍连续时间和离散时间系统的状态空间或状态变量的概念和分析。除此之外，在附录中还给出了书中用到的背景材料。每章内容均包括重点分析、习题解答和补充习题。全书共有近600道习题，每道习题都附有详细的答案。

本书可作为大专院校电气类、电子信息类、计算机类和其他有关专业学生的辅导教材，也可供有关工程技术人员参考。

Hwei P. Hsu: Schaum's Outlines Signals and Systems

ISBN: 0－07－030641－9

Copyright © 1995 by the McGraw-Hill Companies, Inc.

Authorized translation from the English language edition published by McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved.

本书中文简体字版由科学出版社和美国麦格劳-希尔教育出版集团合作出版，未经出版者书面许可，不得以任何方式复制或抄袭本书的任何部分。

版权所有，翻印必究。

本书封面贴有McGraw-Hill公司防伪标签，无标签者不得销售。

图字：01－2001－1562号

图书在版编目（CIP）数据

信号与系统/〔美〕Hwei P. Hsu 著；骆丽，胡健，李哲英译. —北京：科学出版社，2002

（全美经典学习指导系列）

ISBN 7-03-009396-8

Ⅰ. 信… Ⅱ. ①Hsu… ②骆… ③胡… ④李… Ⅲ. 信号系统－高等学校－教材

Ⅳ. TN911.6

中国版本图书馆CIP数据核字（2001）第032794号

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2002年1月第 一 版 开本：A4（890×1240）

2002年1月第一次印刷 印张：20 3/4

印数：1－5 000 字数：587 000

定价：30.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换（北燕））

前　言

几乎所有的电气工程领域以及其他很多科学和工程学科都需要运用信号与系统的概念和理论。信号与系统是对通信、信号处理和控制系统等领域进行进一步研究的基础。

本书可以作为各种版本信号与系统教材的补充。另外，它本身也是一本教材，每章通过大量附有答案的习题对基本概念和原理加以详细分析，这些习题是本书的重要组成部分。

本书第1章介绍连续时间和离散时间的信号与系统的数学描述和表示。第2章研究线性时不变（LTI）系统基本的输入－输出关系，解释系统的单位冲激响应以及卷积运算。第3、4章研究LTI系统分析中使用的变换技术，其中第3章介绍拉普拉斯（Laplace）变换及其在连续时间LTI系统中的应用，第4章介绍 z 变换及其在离散时间LTI系统中的应用。第5、6章介绍信号与系统的傅里叶（Fourier）分析，其中第5章介绍连续时间信号与系统的傅里叶分析，第6章介绍离散时间信号与系统的傅里叶分析。最后一章（第7章）介绍连续时间和离散时间系统的状态空间或状态变量的概念和分析。除此之外，在附录A中还列出了第7章所需的矩阵分析的背景材料。

我很感激Manhattan大学的Gordon Silverman教授，他仔细审阅本书的乎稿并提出了宝贵的意见。我还要感谢McGraw-Hill Schaum丛书的全体职员，尤其要感谢John Aliano提出了宝贵的意见和建议，感谢Maureen Walker认真筹划本书的出版。最后，我要感谢我的妻子Daisy在本书写作过程中给予我的理解和支持。

Hwei P. Hsu
Montville, New Jersey

译 者 序

在电气工程领域及其有关的科学和工程学科领域中，都需要应用信号与系统的基本概念和分析、设计原理。信号与系统是对通信、信号处理、控制系统、生物医学工程、电子科学与技术、电气工程等学科领域进行进一步研究和学习的基础。因此，20 世纪 70 年代以来，信号与系统一直是电类和信息类专业的重要技术基础课程。

在学习信号与系统课程的过程中，如何求解有关信号与系统的分析问题是基本的学习内容，只有通过大量的练习或训练，才能比较牢固地掌握并熟练地应用有关的基本概念和基本分析方法。本书作者根据多年的教学经验，通过习题解答和补充习题，为读者提供了有关信号与系统课程基本概念和基本分析方法的详细讲解。本书内容丰富，讲解细致精辟，在国外已成为许多相关专业学生的必读辅导书。从辅导和帮助有关学科专业同学学好信号与系统课程的角度看，本书既可以作为不同版本信号与系统教材的补充，也可以作为自学教材。根据译者的教学经验，对那些准备报考通信、信息、电子等专业硕士研究生的同学，本书更不失为一本难得的考前辅助教材。

本书的第 1 章由李哲英教授翻译，第 2、3、4 章及附录由骆丽副教授翻译，第 5、6、7 章由胡健副教授翻译，全书由李哲英教授统一校对。

薛健副教授也参与了本书的翻译和校对工作。硕士研究生胡西、张至柔、纪松、李平、胡昕、杨欣等同学也对本书习题部分的翻译做出了贡献，并提出了宝贵的意见，在此对他们表示感谢。

译 者

2001 年 3 月于北方交通大学

致 学 生

要理解本教材的内容，读者必须具备微积分的基本知识以及微分方程的知识，并且学习过电气工程的电路课程。

本书包含连续时间和离散时间的信号与系统。如果只想学习连续时间信号与系统，可以只阅读第1、2章有关连续时间信号与系统的部分，以及第3、5章和第7章的第二部分。如果只想学习离散时间信号与系统，可以只阅读第1、2章有关离散时间信号与系统的部分，以及第4、6章和第7章的第一部分。

要真正掌握一门课，必须注意技巧与知识的相互关系。通过学习和复习大量附有答案的习题，清楚每个问题是如何提出和解决的，就可以很容易地学会解决问题的技巧，增长学识。同时，为了测验和强化学会的技巧，必须作大量的补充习题（本书提供了提示和答案）。在此，我只能说：除了做，别无选择。

目　录

译者序
前　言
致学生
第1章　信号与系统 …… **1**
1.1　引言 …… 1
1.2　信号及信号的分类 …… 1
1.3　基本连续时间信号 …… 5
1.4　基本离散时间信号 …… 9
1.5　系统及其分类 …… 11
习题解答 …… 13
补充习题 …… 35
第2章　线性时不变系统 …… **38**
2.1　简介 …… 38
2.2　连续时间 LTI 系统的响应与卷积积分 …… 38
2.3　连续时间 LTI 系统的性质 …… 39
2.4　连续时间 LTI 系统的特征函数 …… 40
2.5　用微分方程描述的系统 …… 40
2.6　离散时间 LTI 系统的响应与卷积积分 …… 41
2.7　离散时间 LTI 系统的性质 …… 43
2.8　离散时间 LTI 系统的特征函数 …… 43
2.9　用差分方程描述的系统 …… 44
习题解答 …… 45
补充习题 …… 72
第3章　拉普拉斯变换与连续时间 LTI 系统 …… **75**
3.1　简介 …… 75
3.2　拉普拉斯变换 …… 75
3.3　常见信号的拉普拉斯变换 …… 78
3.4　拉普拉斯变换的性质 …… 79
3.5　反拉普拉斯变换 …… 82
3.6　系统函数 …… 83
3.7　单边拉普拉斯变换 …… 84
习题解答 …… 87
补充习题 …… 108
第4章　z 变换与离散时间 LTI 系统 …… **113**
4.1　简介 …… 113
4.2　z 变换 …… 113
4.3　常见序列的 z 变换 …… 116
4.4　z 变换的性质 …… 117
4.5　z 反变换 …… 119
4.6　离散时间 LTI 系统的系统函数 …… 120

4.7 单边 z 变换 …… 121
习题解答 …… 122
补充习题 …… 142
第 5 章 连续时间信号与系统的傅里叶分析 …… **146**
5.1 引言 …… 146
5.2 周期信号傅里叶的表示 …… 146
5.3 傅里叶变换 …… 148
5.4 连续时间傅里叶变换的性质 …… 151
5.5 连续时间 LTI 系统的频率响应 …… 154
5.6 滤波 …… 156
5.7 带宽 …… 158
习题解答 …… 159
补充习题 …… 193
第 6 章 离散时间信号与系统的傅里叶分析 …… **196**
6.1 前言 …… 196
6.2 离散 Fourier 级数 …… 196
6.3 Fourier 变换 …… 198
6.4 Fourier 变换的性质 …… 201
6.5 离散时间 LTI 系统频率响应 …… 204
6.6 离散正弦序列的系统响应 …… 206
6.7 模拟 …… 206
6.8 离散 Fourier 变换 …… 207
习题解答 …… 209
补充习题 …… 244
第 7 章 状态空间分析 …… **248**
7.1 引言 …… 248
7.2 状态的概念 …… 248
7.3 离散时间线性时不变系统状态空间的表示 …… 248
7.4 连续时间线性时不变系统状态空间的表示 …… 250
7.5 离散时间线性时不变系统状态方程的解 …… 252
7.6 连续时间线性时不变系统状态方程的解 …… 254
习题解答 …… 257
补充习题 …… 288
附录 A 矩阵原理复习 …… **294**
A.1 矩阵符号及运算 …… 294
A.2 转置矩阵与逆矩阵 …… 296
A.3 线性无关与秩 …… 297
A.4 行列式 …… 298
A.5 特征值与特征向量 …… 299
A.6 对角矩阵及其相似变换 …… 300
A.7 矩阵函数 …… 301
A.8 矩阵的微积分 …… 306
附录 B 线性时不变系统及各变换的性质 …… **308**
B.1 连续时间 LTI 系统 …… 308
B.2 拉普拉斯变换 …… 308

B.3 傅里叶变换 …… 309
B.4 离散时间 LTI 系统 …… 311
B.5 z 变换 …… 311
B.6 离散时间傅里叶变换 …… 312
B.7 离散傅里叶变换 …… 314
B.8 傅里叶级数 …… 314
B.9 离散傅里叶级数 …… 315
附录 C 复数复习 …… **316**
C.1 复数的表示 …… 316
C.2 加法、乘法和除法 …… 316
C.3 共轭复数 …… 316
C.4 复数的幂和根 …… 317
附录 D 有用的数学公式 …… **318**
D.1 求和公式 …… 318
D.2 Euler 公式 …… 318
D.3 三角恒等式 …… 318
D.4 幂级数展开 …… 319
D.5 指数和对数函数 …… 319
D.6 部分无限积分 …… 319

第1章 信号与系统

1.1 引言

几乎所有的电气工程领域和其他很多科学和工程学科都需要信号与系统的概念和原理。本章介绍信号与系统的数学描述、表示及分类。另外，还要定义几个重要的基本信号。

1.2 信号及信号的分类

信号是表示物理量或变量的函数。一般来说，信号包含某个现象的本质或行为特征。例如，在 *RC* 电路中，信号表示电容两端的电压或流过电阻的电流。从数学上讲，信号可以表示为自变量 t 的函数，t 一般代表时间。因此，信号可以用 $x(t)$表示。

A. 连续时间信号与离散时间信号

如果 t 是一个连续变量，那么信号 $x(t)$是连续时间信号。如果 t 是一个离散变量，那么信号 $x(t)$是在离散时间点上定义的，是离散时间信号。由于离散时间信号是在离散时间点上定义的，因此常用序列来表示离散时间信号，表示为$\{x_n\}$或$[x_n]$，其中 n 为整数。图 1-1 所示为连续时间信号 $x(t)$和离散时间信号$[x_n]$。

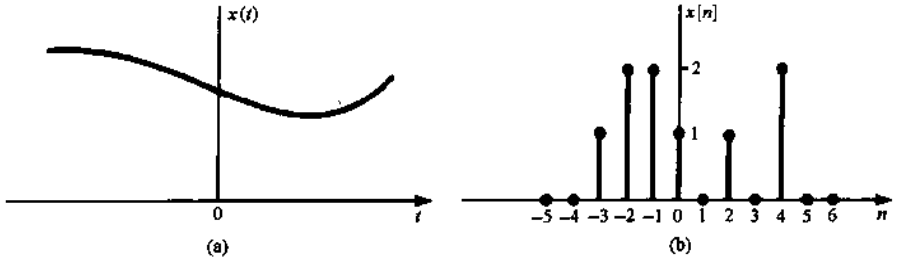


图 1-1 信号的图形表示 (a)连续时间信号；(b)离散时间信号

离散时间信号$[x_n]$可以表示自变量本身是离散的特征。例如，股票市场每天收盘价是一个按照其自身特点在离散时间点(即每天收盘时)上变化的信号。另外，对连续时间信号 $x(t)$取样，也可以获得离散时间信号$[x_n]$。例如

$$x(t_0), x(t_1), \cdots, x(t_n), \cdots$$

或者写成简化的形式如下：

$$x[0], x[1], \cdots, x[n], \cdots$$

或

$$\uparrow$$

$$x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots$$

$$\uparrow$$

在此，可以理解为

$$x_n = [x_n] = x(t_n)$$

其中，x_n 称为取样点，取样点之间的时间间隔称为取样间隔。当取样间隔相等(均匀取样)时，有

$$x_n = [x_n] = x(nT_s)$$

其中，常数 T_s 即为取样间隔。

离散时间信号有两种定义方法：

1. 可以指定计算序列第 n 个值。例如：

$$x[n] = x_n = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & n \geqslant 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

或

$$\{x_n\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots, \left(\frac{1}{2}\right)^n, \cdots\right\}$$

2. 可以直接列出序列的所有值。例如，图 1-1(b)所示的序列可以写成

$$\{x_n\} = \{\cdots, 0, 0, 1, 2, 2, 1, 0, 1, 0, 2, 0, 0, \cdots\}$$

或

$$\{x_n\} = \{1, 2, 2, 1, 0, 1, 0, 2\}$$

在此，使用箭头表示 $n=0$ 项。为了方值起见，也可以不使用箭头，用第 1 项对应 $n=0$ 项，$n<0$ 的所有序列值均为 0。

两个序列的和与积可以定义如下：

$$\{c_n\} = \{a_n\} + \{b_n\} \rightarrow c_n = a_n + b_n$$

$$\{c_n\} = \{a_n\}\{b_n\} \rightarrow c_n = a_n b_n$$

$$\{c_n\} = \alpha\{a_n\} \rightarrow c_n = \alpha a_n \qquad \alpha \text{ 为常数}$$

B. 模拟信号与数字信号

如果一个连续时间信号 $x(t)$为连续区间(a, b)内的任意值，则把该连续时间信号 $x(t)$称为模拟信号。其中，a 为 $-\infty$，b 为 $+\infty$。如果一个离散时间信号 $x[n]$只为有限个不同的值，则把该离散时间信号 $x[n]$称为数字信号。

C. 实数信号与复数信号

如果一个信号 $x(t)$的值为实数，则把该信号称为实数信号。如果一个信号 $x(t)$的值为复数，则把该信号称为复数信号。复数信号一般可表示为如下形式：

$$x(t) = x_1(t) + jx_2(t) \tag{1.1}$$

其中，$x_1(t)$和 $x_2(t)$是实数信号，$j = \sqrt{-1}$。

注意，式(1.1)中的 t 可以是连续变量，也可以是离散变量。

D. 确定信号与随机信号

确定信号是指在任意给定时刻其值完全确定的信号。因此，确定信号的模型可以用一个时间 t 的函数来表示。随机信号是指在任意给定时刻其值不确定的信号，这种信号可以通过统计方法来表征。本书不讨论随机信号。

E. 偶信号与奇信号

如果信号 $x(t)$或 $x[n]$可以表示为

$$\begin{aligned} x(-t) &= x(t) \\ x[-n] &= x[n] \end{aligned} \tag{1.2}$$

则称信号 $x(t)$或 $x[n]$为偶信号。

如果信号 $x(t)$或 $x[n]$可以表示为

$$\begin{aligned} x(-t) &= -x(t) \\ x[-n] &= -x[n] \end{aligned} \tag{1.3}$$

则称信号 $x(t)$或 $x[n]$为奇信号。

偶信号与奇信号的例子如图 1-2 所示。

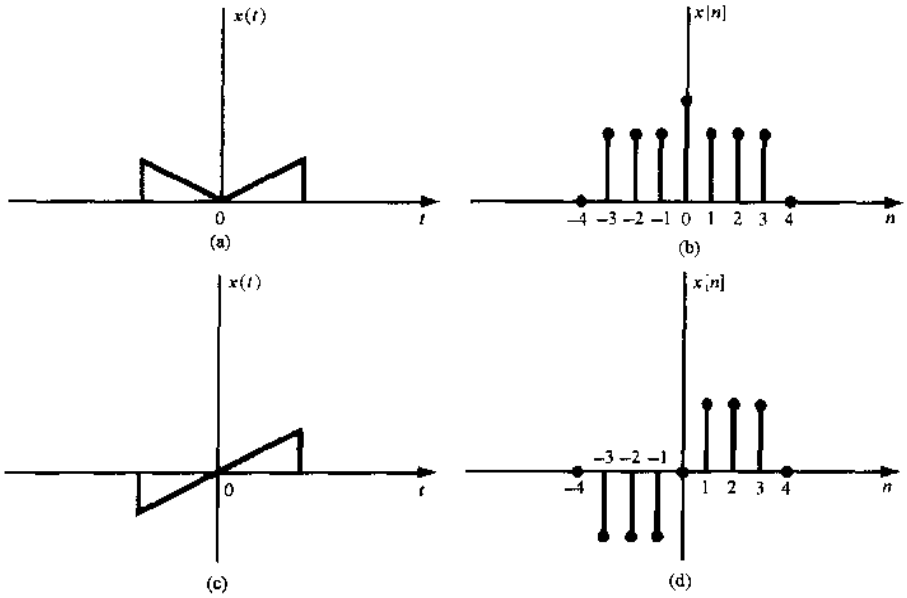


图 1-2 偶信号(a 和 b)与奇信号(c 和 d)示例

任意一个信号可以表示为偶信号与奇信号的和,即

$$\begin{aligned} x(t) &= x_e(t) + x_o(t) \\ x[n] &= x_e[n] + x_o(t) \end{aligned} \tag{1.4}$$

其中

$$x_e(t) = \frac{1}{2}\{x(t) + x(-t)\} \qquad x(t) \text{ 的偶部分}$$

$$x_e[n] = \frac{1}{2}\{x[n] + x[-n]\} \qquad x[n] \text{ 的偶部分} \tag{1.5}$$

$$x_o(t) = \frac{1}{2}\{x(t) - x(-t)\} \qquad x(t) \text{ 的奇部分}$$

$$x_o[n] = \frac{1}{2}\{x[n] - x[-n]\} \qquad x[n] \text{ 的奇部分} \tag{1.6}$$

注意,两个偶信号或两个奇信号的乘积是一个偶信号,而一个偶信号与一个奇信号的乘积是一个奇信号(见习题 1.7)。

F. 周期信号与非周期信号

一个连续时间信号 $x(t)$,如果存在非零的正数 T,对于所有的 t,有

$$x(t + T) = x(t) \tag{1.7}$$

则该连续时间信号 $x(t)$可以称为周期为 T 的周期信号,如图 1-3(a)所示。由式(1.7)或图 1-3(a)可知,对于所有的 t 和任意整数 m,有

$$x(t + mT) = x(t) \tag{1.8}$$

其中 $x(t)$的基本周期 T_0 就是满足式(1.7)的最小正数 T。注意,该定义对常数信号 $x(t)$无效(例如直流信号)。对于常数信号 $x(t)$,不存在基本周期,因为 $x(t)$对任意 T 值(没有最小正值)都是周期性的。任何没有周期的连续时间信号均称为非周期信号。

周期性离散时间信号的定义与此类似。即一个序列 $x[n]$(离散时间信号),如果存在正整数 T,对于所有的 n,有

$$x[n + N] = x[n] \tag{1.9}$$

则该序列 $x[n]$可以称为周期为 N 的周期信号,如图 1-3(b)所示。由式(1.9)或图 1-3(b)可知,对于所有的 n 和任意整数 m,有

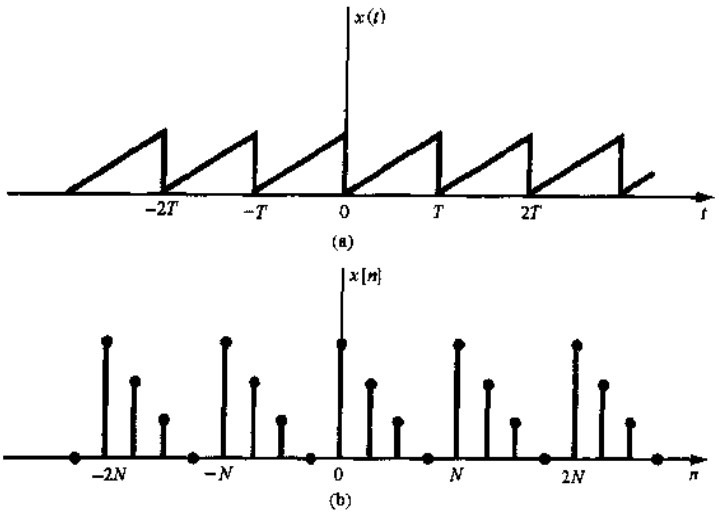


图 1-3

$$x[t + mN] = x[n] \tag{1.10}$$

其中 $x[n]$的基本周期 N_0 就是满足式(1.9)的最小正整数 N。任何没有周期的序列称为非周期序列。

注意,对连续时间信号进行均匀取样所获得的序列不一定是周期序列(见习题 1.12 和 1.13),并且,两个连续时间周期信号的和不一定是周期信号,但两个周期序列的和一定是周期序列(见习题 1.14 和 1.15)。

G. 能量信号与功率信号

设 $v(t)$是一个电阻两端的电压,所产生的电流为 $i(t)$,则每欧姆上的瞬时功率 $p(t)$可以定义为

$$p(t) = \frac{v(t)i(t)}{R} = i^2(t) \tag{1.11}$$

每欧姆上的总能量 E 和平均功率P 分别为

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} i^2(t)dt \qquad \text{焦耳} \tag{1.12}$$

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} i^2(t)dt \quad \text{瓦特} \tag{1.13}$$

对于任意一个连续时间信号 $x(t)$,其归一化能量 E 可以定义为

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \tag{1.14}$$

$x(t)$的归一化平均功率 P 可以定义为

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt \tag{1.15}$$

同样道理,对于任意一个离散时间信号 $x[n]$,其归一化能量 E 可以定义为

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \tag{1.16}$$

$x[n]$的归一化平均功率 P 可以定义为

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 \tag{1.17}$$

根据定义(1.14)~(1.17),可以把信号分为如下几类:

1. 当且仅当 $0<E<\infty$ 时,$x(t)$(或 $x[n]$)为能量信号(或序列),且 $P=0$。
2. 当且仅当 $0<P<\infty$ 时,$x(t)$(或 $x[n]$)为功率信号(或序列),且 $E=\infty$。
3. 既不满足能量信号的特性,又不满足功率信号特性的信号。

注意,如果一个周期信号在每个周期内的能量是有限的,则该周期信号是功率信号,并且求这种信号的平均功率只需要通过一个周期来计算(见习题1.18)。

1.3 基本连续时间信号

A. 单位阶跃函数

单位阶跃函数 $u(t)$ 可以定义为

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \tag{1.18}$$

如图1-4(a)所示。注意,在 $t=0$ 时刻,单位阶跃函数是不连续的,在 $t=0$ 时刻其值不存在。同样道理,平移的单位阶跃函数 $u(t-t_0)$ 可以定义为

$$u(t-t_0) = \begin{cases} 1 & t > t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{cases} \tag{1.19}$$

如图1-4(b)所示。

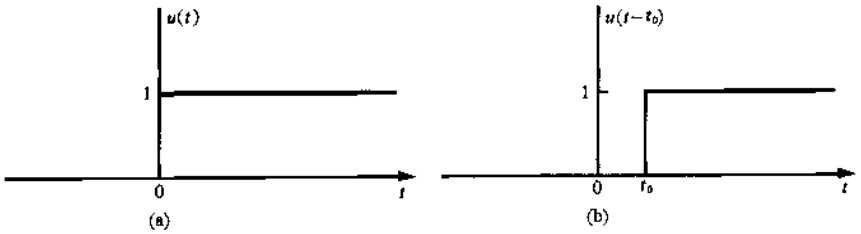


图1-4 (a)单位阶跃函数;(b)平移的单位阶跃函数

B. 单位冲激函数

单位冲激函数 $\delta(t)$,又称为狄拉克函数(δ 函数),在系统分析中极其重要。一般把 $\delta(t)$ 定义为适当选定的普通函数的极限,该函数在无限小时间间隔内具有单位面积,如图1-5所示,具有以下特性:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t)dt = 1$$

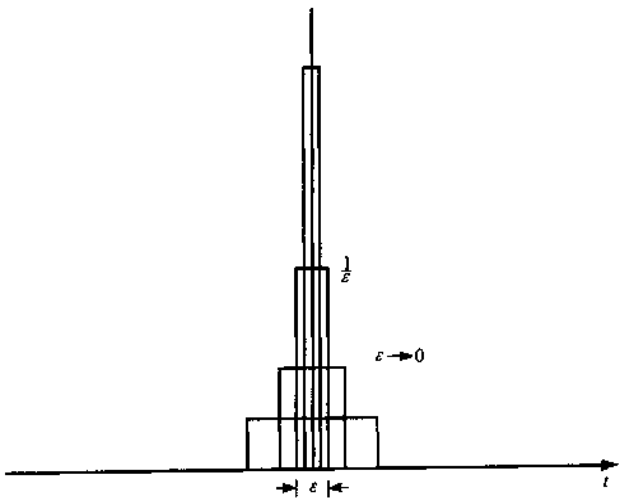


图1-5

普通函数除信号点之外其余全部为0,必须有整数0(在Riemann积分情形下)。但 $\delta(t)$ 不是普通函数,其数学上的定义为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\delta(t)dt = \varphi(0) \tag{1.20}$$

其中 $\varphi(t)$是一个在 $t=0$ 时刻连续的普通函数。

$\delta(t)$的另一种定义为

$$\int_b^a\varphi(t)\delta(t)dt = \begin{cases}\varphi(0) & a<0<b\\ 0 & a<b<0 \text{ 或 } 0<a<b\\ \text{未定义} & a=0 \text{ 或 } b=0\end{cases} \tag{1.21}$$

注意,式(1.20)和(1.21)是一种象征性的表达式,不应看作是普通的 Riemann(黎曼)积分。在这种情况下,时常把 $\delta(t)$称作广义函数,$\varphi(t)$称作测试函数。不同类型的测试函数可以定义不同的广义函数(见习题 1.24)。同样,延迟后的 δ 函数$\delta(t-t_0)$可以定义为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\delta(t-t_0)dt = \varphi(t_0) \tag{1.22}$$

其中,$\varphi(t)$是一个在 $t=t_0$ 时刻连续的普通函数。图 1-6 所示为 $\delta(t)$和 $\delta(t-t_0)$的图示。



图 1-6 (a)单位冲激函数;(b)平移后的单位冲激函数

$\delta(t)$的其他特性如下:

如果 $x(t)$在 $t=0$ 时刻连续,则

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t) \tag{1.23}$$

$$\delta(-t) = \delta(t) \tag{1.24}$$

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t) \tag{1.25}$$

如果 $x(t)$在 $t=t_0$ 时刻连续,则

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0) \tag{1.26}$$

利用式(1.22)和(1.24),可以将任意一个连续时间信号 $x(t)$表示为

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \tag{1.27}$$

广义导数

如果 $g(t)$是一个广义函数,其 n 阶广义导数$g^{(n)}(t)=d^ng(t)/dt^n$ 可以由以下关系来定义:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)g^{(n)}(t)dt = (-1)^n\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^{(n)}(t)g(t)dt \tag{1.28}$$

其中,$\varphi(t)$是测试函数,可以微分任意多次,在某个固定间隔外消失。$\varphi^{(n)}(t)$是 $\varphi(t)$的 n 阶导数。由式(1.28)和(1.20),$\delta(t)$的导数可以定义为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\delta'(t)dt = -\varphi'(0) \tag{1.29}$$

其中,$\varphi(t)$是测试函数,在 $t=0$ 时刻连续,在某个固定间隔外消失,且 $\varphi'(0)=d\varphi(t)/dt|_{t=0}$。利用式(1.28),$u(t)$的导数就是 $\delta(t)$(见习题 1.28),即

$$\delta(t) = u'(t) = \frac{du(t)}{dt} \tag{1.30}$$

则单位阶跃函数可以表示为

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau \tag{1.31}$$

注意，单位阶跃函数 $u(t)$在 $t=0$ 时刻不连续。因此，式(1.30)所示的 $u(t)$的导数不是一般情况下函数的导数，可以认为是广义函数情况下的广义导数。由式(1.31)可以看出，在 $t=0$ 时刻，$u(t)$不存在，且由 $\varphi(t)=1$ 时的式(1.21)得

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

结果与 $u(t)$的定义(1.18)一致。

C. 复指数信号

复指数信号

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} \tag{1.32}$$

是一种重要的复数信号。根据 Euler(欧拉)公式，复指数信号可以定义为

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} = \cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t \tag{1.33}$$

即 $x(t)$是一个复数信号，其实部为 $\cos\omega_0 t$，虚部为 $\sin\omega_0 t$。式(1.32)中的复指数信号 $x(t)$有一个重要的特性，就是其周期性。$x(t)$的基本周期 T_0 为(见习题 1.9)

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \tag{1.34}$$

注意，对于任意的 ω_0，$x(t)$均为周期函数。

一般复指数信号

设 $s=\sigma+j\omega$ 是一个复数，则 $x(t)$可以定义为

$$x(t) = e^{st} = e^{(\sigma+j\omega)t} = e^{\sigma}(\cos\omega t + j\sin\omega t) \tag{1.35}$$

式(1.35)中的信号 $x(t)$称作一般复指数信号，其实部 $e^{\sigma}\cos\omega t$ 和虚部 $e^{\sigma}\sin\omega t$ 都是按指数增长($\sigma>0$)或减小($\sigma<0$)的正弦信号(如图 1-7 所示)。

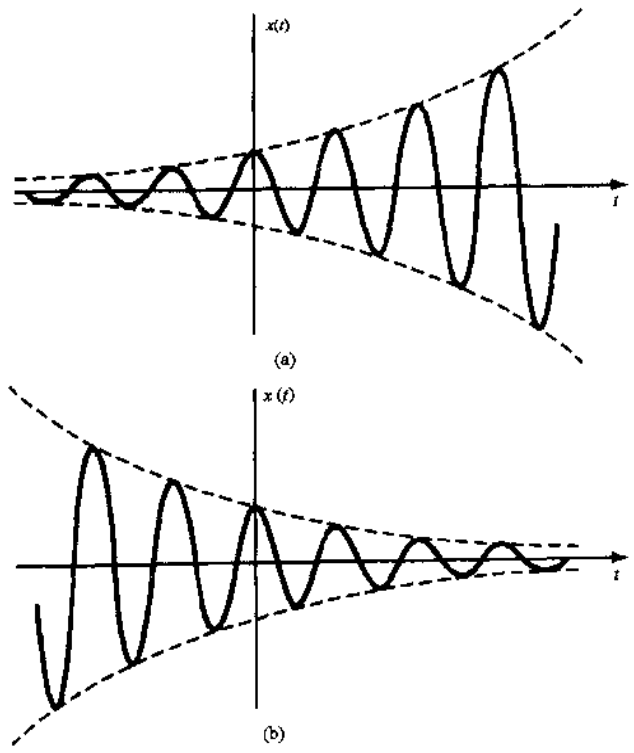


图 1-7 (a)指数增长的正弦信号；(b)指数减小的正弦信号

实指数信号

如果 $s=\sigma$(实数)，则式(1.35)简化为一个实指数信号

$$x(t) = e^{\sigma t} \tag{1.36}$$

如图 1-8 所示，如果 $\sigma>0$，$x(t)$是一个增长的指数信号，如果 $\sigma<0$，$x(t)$是一个减小的指数信号。

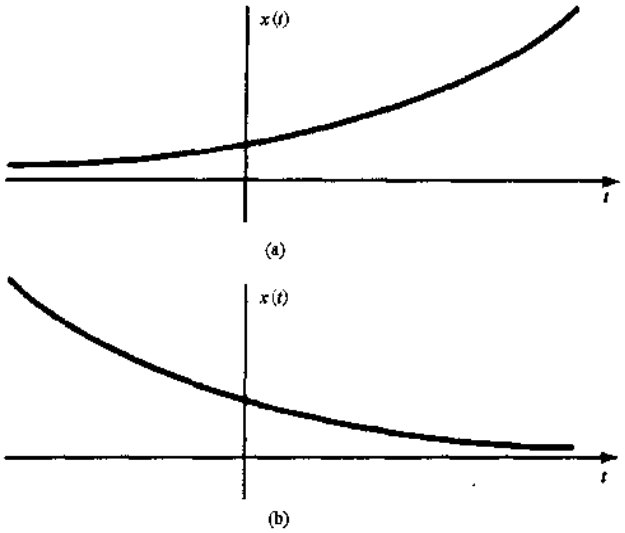


图 1-8 连续时间实指数信号 (a)$\sigma>0$；(b)$\sigma<0$

D. 正弦信号

一个连续时间的正弦信号可以表示为

$$x(t) = A\cos(\omega_0 + \theta) \tag{1.37}$$

其中，A 是幅度(实数)，ω_0 是角频率，为每秒钟扫过的弧度，θ 是以弧度表示的相角。如图 1-9 所示的正弦信号 $x(t)$是一个周期信号，其基本周期为

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \tag{1.38}$$

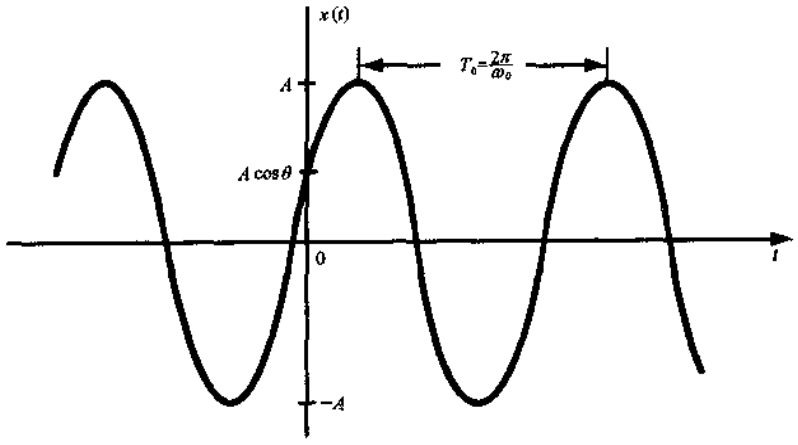


图 1-9 连续时间正弦信号

基本周期 T_0 的倒数称为基本频率 f_0，单位为赫兹(Hz)：

$$f_0 = \frac{1}{T_0} \tag{1.39}$$

由式(1.38)和(1.39)得

$$\omega_0 = 2\pi f_0 \tag{1.40}$$

ω_0 称为基本角频率。利用 Euler 公式，式(1.37)中的正弦信号可以表示为

$$A\cos(\omega_0 + \theta) = A\mathrm{Re}\{e^{j(\omega_0 t+\theta)}\} \tag{1.41}$$

其中，Re 表示实数部分，也可以使用 Im 表示虚数部分，得

$$A\mathrm{Im}\{e^{j(\omega_0 t+\theta)}\} = A\sin(\omega_0 t + \theta) \tag{1.42}$$

1.4 基本离散时间信号

A. 单位阶跃序列

单位阶跃序列 $u[n]$可以定义为

$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geqslant 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \tag{1.43}$$

如图 1-10(a)所示。注意,在 $n=0$ 时刻,$u[n]$有定义(与连续时间阶跃函数在 $t=0$ 时刻无定义不同),且等于单位值 1。同样道理,平移后的单位阶跃序列 $u[n-k]$可以定义为

$$u[n-k] = \begin{cases} 1 & n \geqslant k \\ 0 & n < k \end{cases} \tag{1.44}$$

如图 1-10(b)所示。

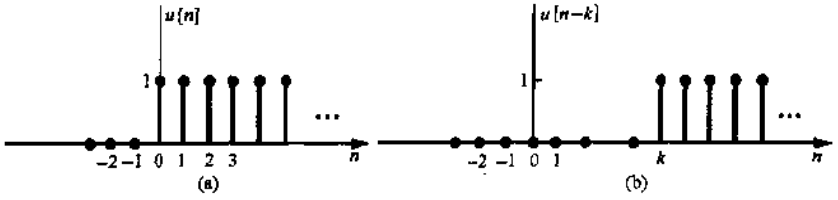


图 1-10 (a)单位阶跃序列;(b)平移后的单位阶跃序列

B. 单位冲激序列

单位冲激(或单位取样)序列 $\delta[n]$可以定义为

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \tag{1.45}$$

如图 1-11(a)所示。同样道理,平移后的单位冲激(或单位取样)序列 $\delta[n-k]$可以定义为

$$\delta[n-k] = \begin{cases} 1 & n = k \\ 0 & n \neq k \end{cases} \tag{1.46}$$

如图 1-11(b)所示。

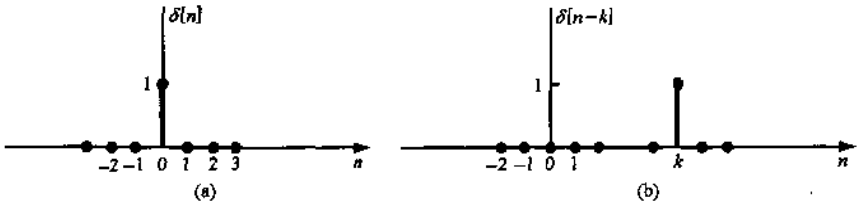


图 1-11 (a)单位冲激(取样)序列;(b)平移后的单位冲激序列

与连续时间单位冲激 $\delta(t)$不同,$\delta[n]$的定义在数学上并不复杂或困难。由式(1.45)和(1.46)可以看出

$$x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n] \tag{1.47}$$

$$x[n]\delta[n-k] = x[k]\delta[n-k] \tag{1.48}$$

这分别是式(1.25)和(1.26)的离散时间对应式。由式(1.43)~(1.46),$\delta[n]$和 $u[n]$的相互关系为

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1] \tag{1.49}$$

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] \tag{1.50}$$

这分别是式(1.30)和(1.31)的离散时间对应式。

利用式(1.46),任意一个序列 $x[n]$可以表示为

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \tag{1.51}$$

这正好对应连续时间信号情况下的式(1.27)。

C. 复指数序列

复指数序列的形式为

$$x[n] = e^{j\Omega_0 n} \tag{1.52}$$

根据 Euler 公式,$x[n]$还可以表示为

$$x[n] = e^{j\Omega_0 n} = \cos\Omega_0 n + j\sin\Omega_0 n \tag{1.53}$$

即 $x[n]$是一个复数序列,其实部为 $\cos\Omega_0 n$,虚部为 $\sin\Omega_0 n$。

$e^{j\Omega_0 n}$的周期性

为了使 $e^{j\Omega_0 n}$是周期为$N(>0)$的周期序列,Ω_0 必须满足以下条件(见习题 1.11):

$$\frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N} \qquad m \text{ 为正整数} \tag{1.54}$$

因此,对于任意的 Ω_0,序列 $e^{j\Omega_0 n}$不是周期序列,只有在 $\Omega_0/2\pi$ 是有理数时才是周期序列。注意,这个性质不同于连续时间信号 $e^{j\omega_0 t}$在任意 ω_0 时均为周期信号的性质。因此,如果 Ω_0 满足式(1.54)中的周期性条件,且 $\Omega_0 \neq 0$,N 和 m 没有公因子,则式(1.52)中序列 $x[n]$的基本周期 N_0 为

$$N_0 = m\left(\frac{2\pi}{\Omega_0}\right) \tag{1.55}$$

离散时间复指数与连续时间复指数的另一个重要区别是,信号 $e^{j\omega_0 t}$随 ω_0 的不同而不同,信号 $e^{j\Omega_0 n}$却不是这样。

设有一个频率为$(\Omega_0 + 2\pi k)$的复指数序列,其中 k 为整数,则有

$$e^{j(\Omega_0+2\pi k)n} = e^{j\Omega_0 n}e^{j2\pi kn} = e^{j\Omega_0 n} \tag{1.56}$$

因为 $e^{j2\pi kn} = 1$,由式(1.56)可以看出,复指数序列在频率 Ω_0 处与在$(\Omega_0 \pm 2\pi k)$、$(\Omega_0 \pm 4\pi k)$等处的值是相等的。因此,在处理离散时间指数序列时,只需要考虑以 2π 为间隔长度来选择 Ω_0。一般情况下,常使用间隔 $0 \leqslant \Omega_0 < 2\pi$ 或 $-\pi \leqslant \Omega_0 < \pi$。

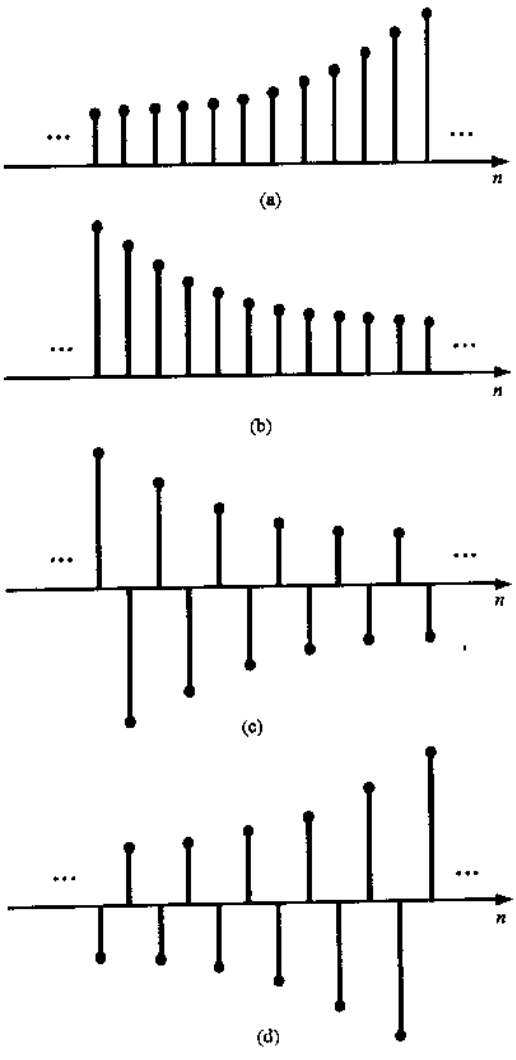


图 1-12 实指数序列 (a)$\alpha>1$;(b)$1>\alpha>0$;(c)$0>\alpha>-1$;(d)$\alpha<-1$

一般复指数序列

最普通的复指数序列常定义为

$$x[n] = C\alpha^n \tag{1.57}$$

其中,C 和 α 都是普通的复指数。注意,式(1.52)是式(1.57)在 $C=1$ 且 $\alpha = e^{j\Omega_0}$ 时的一个特例。

实指数序列

如果式(1.57)中的 C 和 α 都是实数,则 $x[n]$是一个实指数序列。可以分为四种不同的情况:$\alpha>1$、$0<\alpha<1$、$-1<\alpha<0$ 和 $\alpha<-1$,图 1-12 显示了这四种实指数序列。注意,如果 $\alpha=1$,$x[n]$就是一个常数序列;相

反，$\alpha = -1$，$x[n]$在 $+C$ 与 $-C$ 之间交替变化。

D. 正弦序列

正弦序列可以表示为

$$x[n] = A\cos(\Omega_0 n + \theta) \tag{1.58}$$

如果 n 没有量纲，则 Ω_0 和 θ 的单位是弧度。图 1-13 显示了两个正弦序列的例子。与前面的方法一样，式(1.58)中的正弦序列可以表示为

$$A\cos(\Omega_0 n + \theta) = A\mathrm{Re}\{e^{j(\Omega_0 n+\theta)}\} \tag{1.59}$$

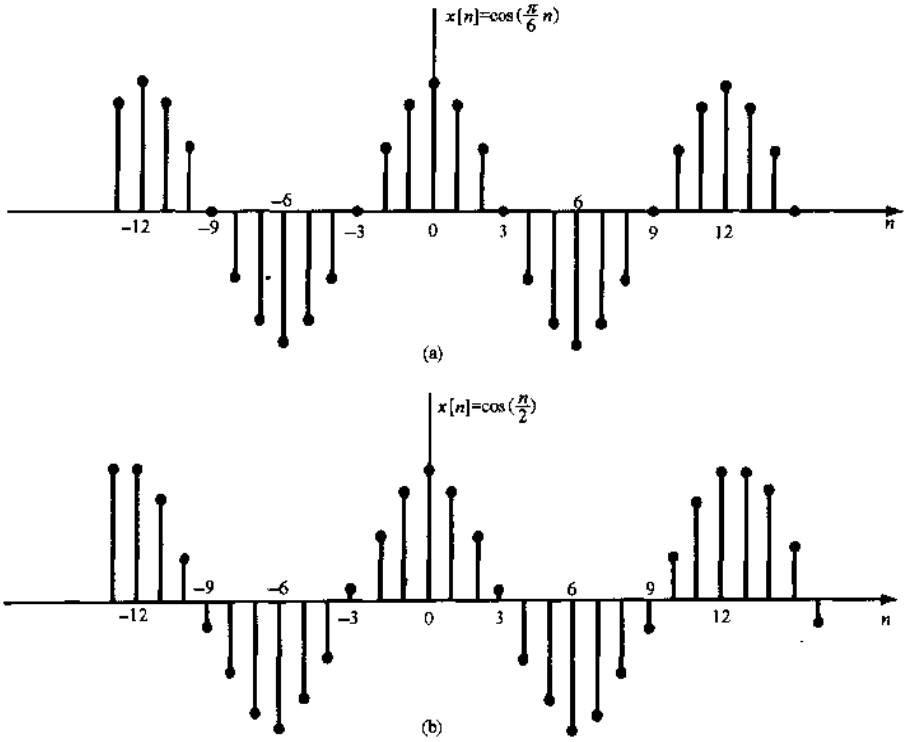


图 1-13 正弦序列 (a)$x[n] = \cos(\pi n/6)$；(b)$x[n] = \cos(n/2)$

与式(1.52)中复指数序列的情况一样，正弦序列也是如此[见式(1.54)和(1.56)]。例如，图 1-13(a)中的正弦序列是以基本周期为 12 的重复的周期序列，但图 1-13(b)中的正弦序列是非周期序列。

1.5 系统及其分类

A. 系统的表示

系统是一个数学模型，是对反映输入(或激励)信号与输出(或响应)信号关系的物理过程的描述。

设 x 和 y 分别是一个系统的输入、输出信号，则该系统可以看作是 x 到 y 的传递(或映射)。这种传递可以用数学公式表示为

$$y = \mathrm{T}x \tag{1.60}$$

其中，T 是运算符，表示 x 到 y 的传递规则。式(1.60)可以用图 1-14(a)描述，多输入/输出信号可以用图 1-14(b)描述。本书的重点是单输入/单输出信号的系统。

B. 连续时间系统与离散时间系统

如果一个系统的输入和输出信号 x 和 y 是连续时间信号，则这个系统称为连续时间系统，

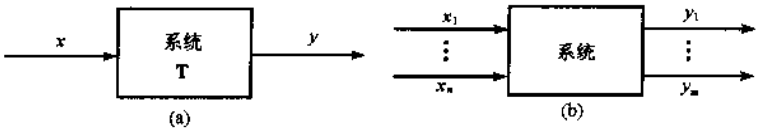


图 1-14 单输入/输出信号系统及多输入/输出信号系统

如图 1-15(a)所示。如果一个系统的输入和输出信号是离散时间信号或序列，则这个系统称为离散时间系统，如图 1-15(b)所示。

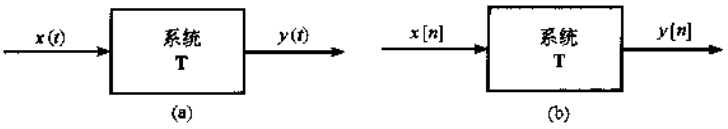


图 1-15 (a)连续时间系统；(b)离散时间系统

C. 记忆系统与无记忆系统

如果一个系统的输出信号在任何时刻都只与当时的输入信号有关，则这个系统称为无记忆系统，反之称为记忆系统。例如，电阻 R 是一个无记忆系统，输入 $x(t)$ 为流过电阻的电流，输出 $y(t)$ 为电阻两端的电压，则电阻的输入-输出关系(欧姆定律)为

$$y(t) = Rx(t) \tag{1.61}$$

电容 C 是一个记忆系统的例子，输入 $x(t)$ 为电流，输出 $y(t)$ 为电压，则

$$y(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \tag{1.62}$$

记忆系统的另外一个例子是离散时间系统，其输入和输出序列的关系为

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \tag{1.63}$$

D. 因果系统与非因果系统

如果一个系统的输出 $y(t)$ 在任意 $t = t_0$ 时刻都只与 $t \leqslant t_0$ 时的输入 $x(t)$ 有关，则这个系统称为因果系统。也就是，因果系统当时的输出只与当前和(或)过去的输入有关，而与将来无关。因此，在一个因果系统中，在没有对系统施加输入之前，不可能得到输出。如果没有因果关系，则该系统就称为非因果系统。例如下面非因果系统的例子

$$y(t) = x(t+1) \tag{1.64}$$

$$y[n] = x[-n] \tag{1.65}$$

注意，所有的无记忆系统都是因果系统，反之却不然。

E. 线性系统与非线性系统

如果式(1.60)中的算子 T 满足下面两个条件，则把 T 称为线性算子，用线性算子 T 表示的系统称为线性系统。

1. 叠加性

对于任意的信号 x_1、x_2，已知 $\mathbf{T}x_1 = y_1$，$\mathbf{T}x_2 = y_2$，则

$$\mathbf{T}\{x_1 + x_2\} = y_1 + y_2 \tag{1.66}$$

2. 倍增性(或比例性)

对于任意信号 x 和任意的比例 α，有

$$\mathbf{T}\{\alpha x\} = \alpha y \tag{1.67}$$

不满足式(1.66)或式(1.67)的系统称为非线性系统。式(1.66)和式(1.67)可以合并为一个条件,即

$$\mathbf{T}\{a_1x_1 + a_2x_2\} = a_1y_1 + a_2y_2 \tag{1.68}$$

其中,a_1、a_2 是任意的比例。式(1.68)称为重叠性。电阻[式(1.61)]和电容[式(1.62)]就是线性系统的例子。下面是非线性系统的例子:

$$y = x^2 \tag{1.69}$$

$$y = \cos x \tag{1.70}$$

注意,线性系统的倍增(或比例)性[式(1.67)]的推论是,零输入产生零输出。下面将设式(1.67)中的 $a=0$,可以得到线性系统的另一个重要性质。

F. 时不变系统与时变系统

如果一个系统输入信号在时间上的平移(延迟或超前),引起输出信号在时间上的平移,则这个系统称为时不变系统。即一个连续时间系统,如果对于任意实数 τ,有

$$\mathbf{T}\{x(t-\tau)\} = y(t-\tau) \tag{1.71}$$

则该系统是时不变系统。对一个离散系统,如果对于任意的整数 k,有

$$\mathbf{T}\{x[n-k]\} = y[n-k] \tag{1.72}$$

则该系统是时不变(或移不变)系统。不满足式(1.71)(连续时间系统)或式(1.72)(离散时间系统)的系统称为时变系统。要检查一个系统是否是时不变系统,可以用平移后的输出与由平移后的输入产生的输出相比较(见习题 1.33~1.39)。

G. 线性时不变系统

如果一个系统是线性的,并且也是时不变的,则这个系统称为线性时不变(LTI)系统。

H. 稳定系统

如果一个系统对于任意的有界输入 x

$$|x| \leqslant k_1 \tag{1.73}$$

对应的输出 y 也是有界的,为

$$|y| \leqslant k_2 \tag{1.74}$$

其中,k_1、k_2 为有限的实常数,则这个系统是有界输入/有界输出(BIBO)稳定的。注意,稳定性还有其他很多定义(见第7章)。

I. 反馈系统

反馈系统是一种重要的特殊系统。在反馈系统中,输出信号反馈并加入到系统的输入端,如图1-16所示。

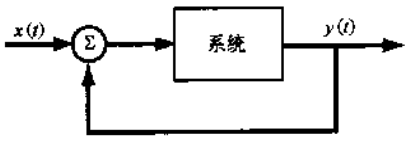


图 1-16 反馈系统

习 题 解 答

信号及其分类

1.1 一个连续时间信号 $x(t)$如图 1-17 所示。画出并标明下列信号。

(a)$x(t-2)$ (b)$x(2t)$ (c)$x(t/2)$ (d)$x(-t)$

解 (a)$x(t-2)$如图 1-18(a)所示。

(b)$x(2t)$如图 1-18(b)所示。

(c)$x(t/2)$如图 1-18(c)所示。

(d)$x(-t)$如图 1-18(d)所示。

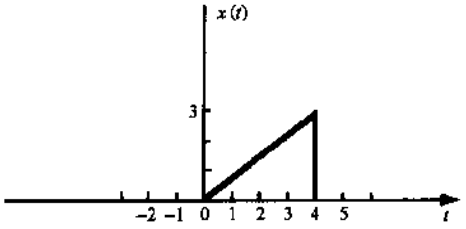


图 1-17

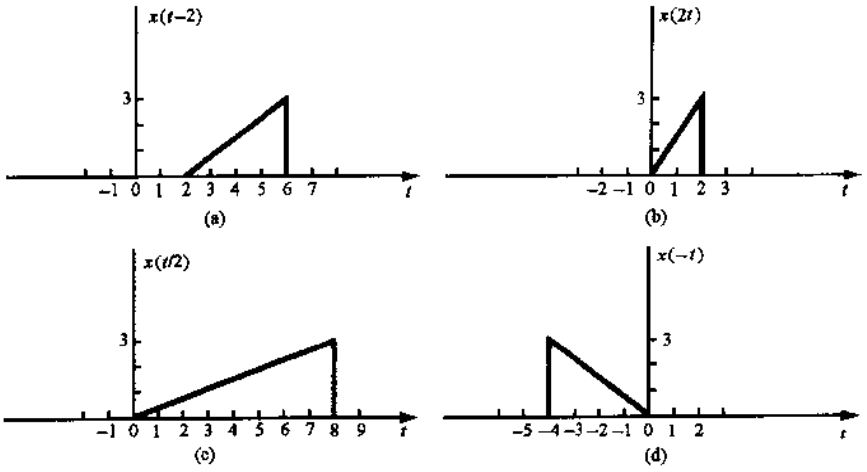


图 1-18

1.2 一个离散时间信号 $x[n]$ 如图 1-19 所示。画出并标明下列信号。

(a)$x[n-2]$　　(b)$x[2n]$

(c)$x[-n]$　　(d)$x[-n+2]$

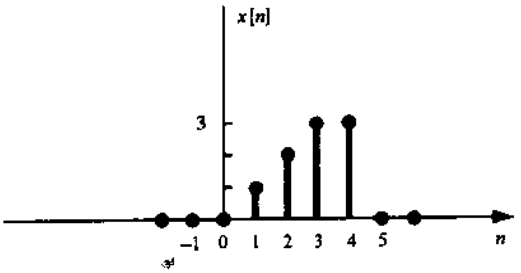


图 1-19

(a)$x[n-2]$如图 1-20(a)所示。

(b)$x[2n]$如图 1-20(b)所示。

(c)$x[-n]$如图 1-20(c)所示。

(d)$x[-n+2]$如图 1-20(d)所示。

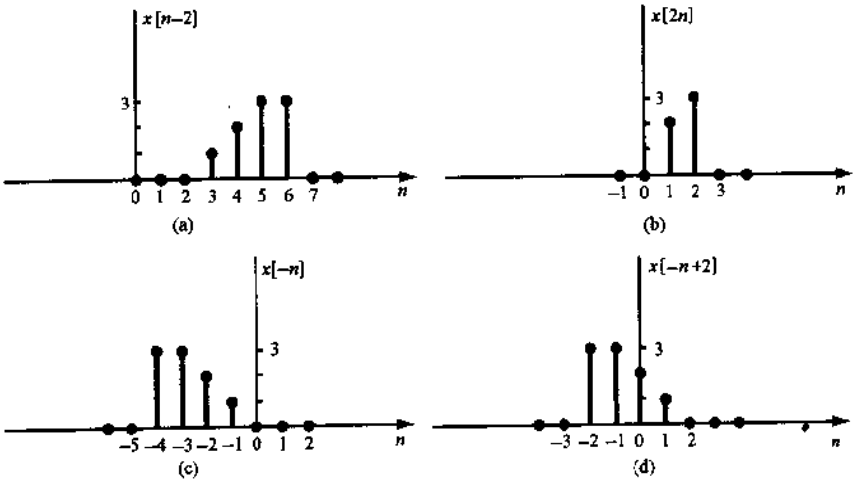


图 1-20

1.3 给定一个连续时间信号为

$$x(t)=\begin{cases}1-|t| & -1\leqslant t\leqslant 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

如果以下面的取样间隔对 $x(t)$ 均匀取样，确定得到的离散时间序列。

(a)0.25s (b)0.5s (c)1.0s

解 对此问题用作图法更简单一些。信号 $x(t)$ 如图 1-21(a)所示。图 1-21(b)～(d)分别画出了三种取样间隔下得到的取样序列。

(a)$T_s=0.25$s。由图 1-21(b)得

$$x[n]=\{\cdots,0,0.25,0.5,0.75,1,0.75,0.5,0.25,0,\cdots\}$$

(b)$T_s=0.5$s。由图 1-21(c)得

$$x[n]=\{\cdots,0,0.5,1,0.5,0,\cdots\}$$

(c)$T_s=1.0$s。由图 1-21(d)得

$$x[n]=\{\cdots,0,1,0,\cdots\}=\delta[n]$$

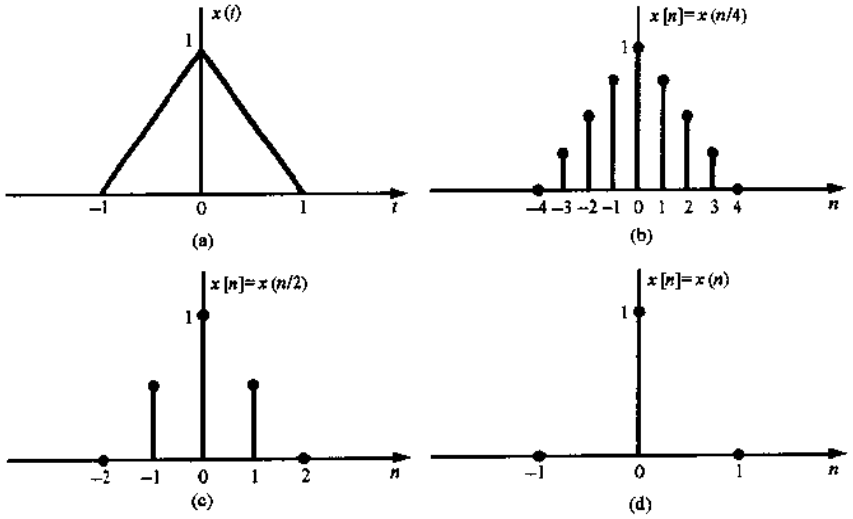


图 1-21

1.4 利用如图 1-22 所示的离散时间信号 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$，用图和一系列数表示以下信号。

(a)$y_1[n]=x_1[n]+x_2[n]$ (b)$y_2[n]=2x_1[n]$ (c)$y_3[n]=x_1[n]x_2[n]$

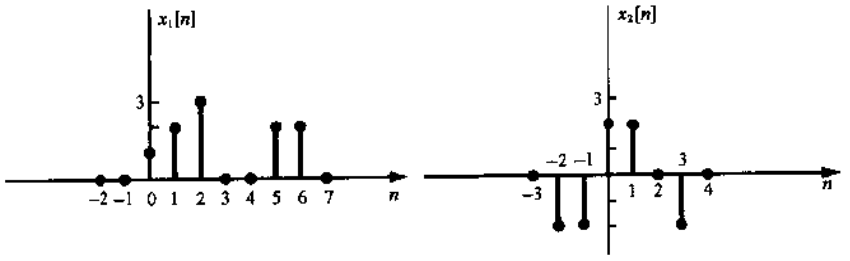


图 1-22

解 (a)$y_1[n]$ 如图 1-23(a)所示。由图 1-23(a)得

$$y_1[n]=\{\cdots,0,-2,-2,3,4,3,-2,0,2,2,0,\cdots\}$$

(b)$y_2[n]$ 如图 1-23(b)所示。由图 1-23(b)得

$$y_2[n]=\{\cdots,0,2,4,6,0,0,4,4,0,\cdots\}$$

(c)$y_3[n]$ 如图 1-23(c)所示。由图 1-23(c)得

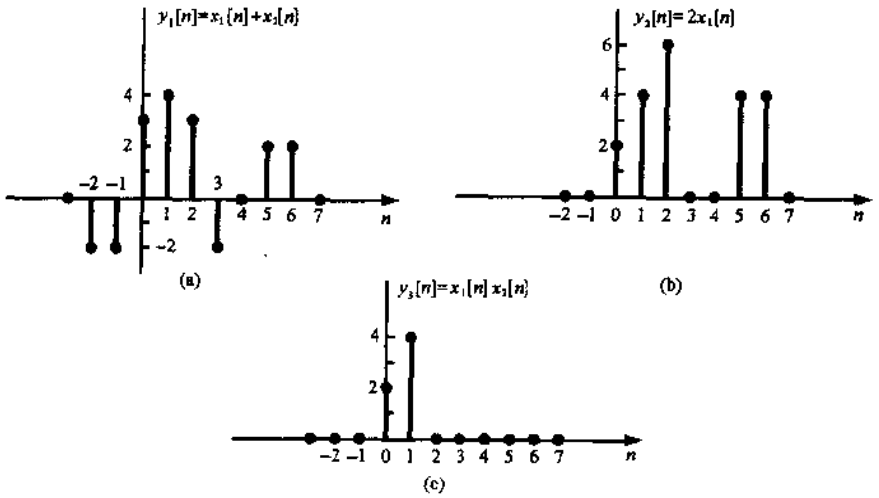


图 1-23

$$x[n] = \{\cdots, 0, 2, 4, 0, \cdots\}$$

1.5 画出并标明如图 1-24 所示信号的奇、偶部分。

[redacted] 利用式(1.5)和(1.6)，图 1-24 所示信号的奇、偶部分如图 1-25 所示。

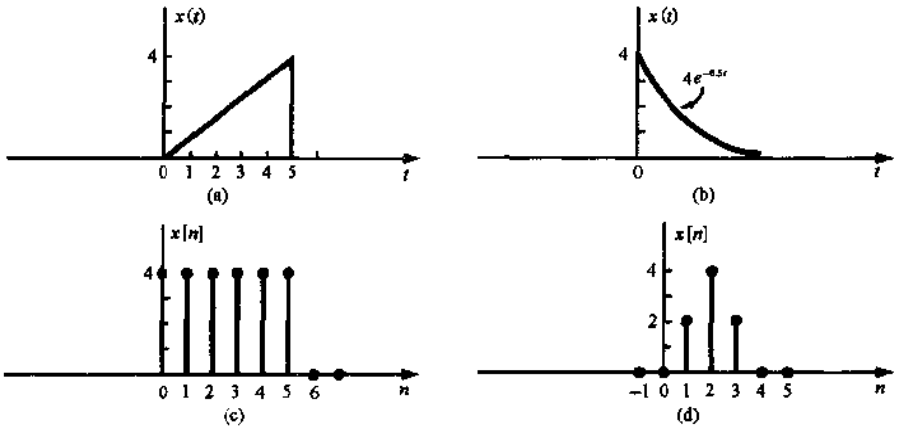


图 1-24

1.6 求出 $x(t)=e^{jt}$ 的奇、偶部分。

[redacted] 设 $x_e(t)$ 和 $x_o(t)$ 分别是 e^{jt} 的奇、偶部分，则

$$e^{jt} = x_e(t) + x_o(t)$$

由式(1.5)和(1.6)，利用 Euler 公式，得

$$x_e(t) = \frac{1}{2}(e^{jt} + e^{-jt}) = \cos t$$

$$x_o(t) = \frac{1}{2}(e^{jt} - e^{-jt}) = j\sin t$$

1.7 证明两个奇信号或两个偶信号的乘积是一个偶信号，一个奇信号和一个偶信号的乘积是一个奇信号。

[redacted] 设 $x(t)=x_1(t)x_2(t)$。如果 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 都是偶信号，则

$$x(-t) = x_1(-t)x_2(-t) = x_1(t)x_2(t) = x(t)$$

$x(t)$ 是偶信号。如果 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 都是奇信号，则

$$x(-t) = x_1(-t)x_2(-t) = -x_1(t)[-x_2(t)] = x_1(t)x_2(t) = x(t)$$

$x(t)$ 是偶信号。如果 $x_1(t)$ 是偶信号，$x_2(t)$ 是奇信号，则

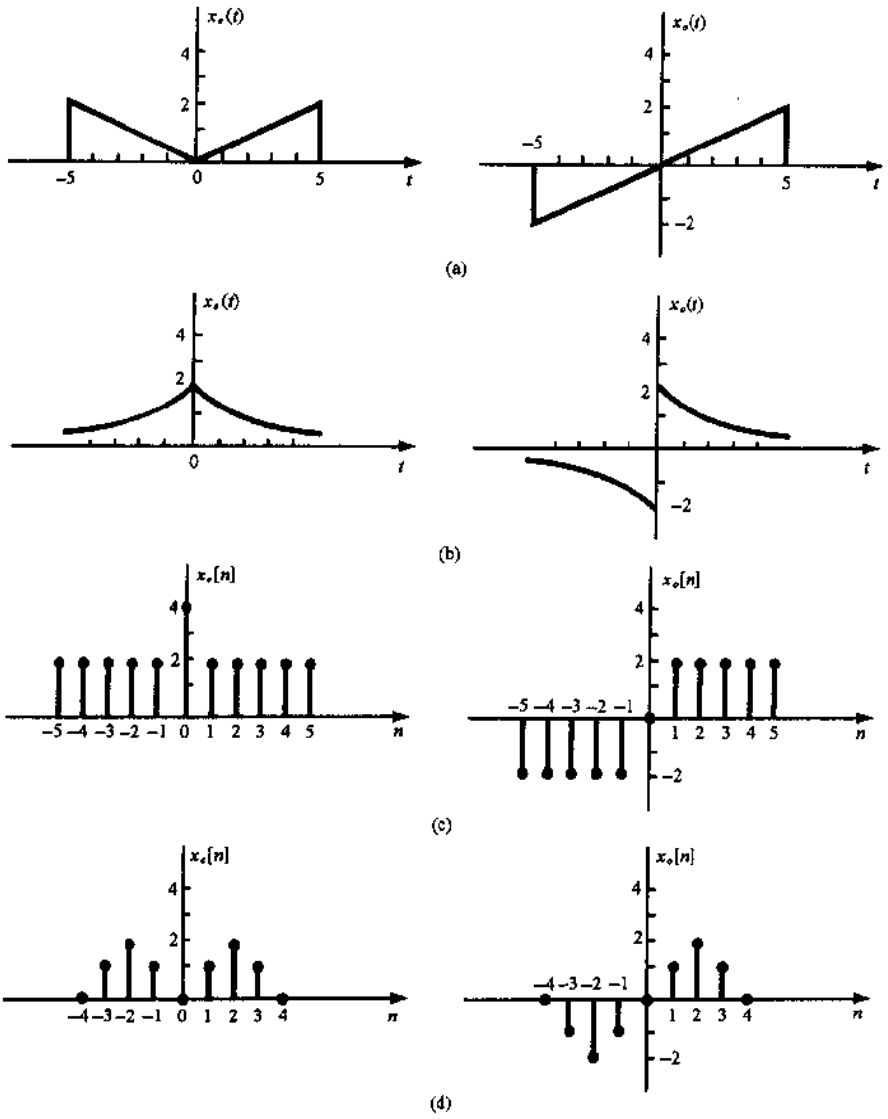


图 1-25

$$x(-t) = x_1(-t)x_2(-t) = x_1(t)[-x_2(t)] = -x_1(t)x_2(t) = -x(t)$$

$x(t)$是奇信号。注意,在上面的证明中,变量 t 既可代表连续时间变量,也可代表离散时间变量。

1.8 证明

(a)如果 $x(t)$和 $x[n]$是偶信号,则

$$\int_{-a}^{a} x(t)dt = 2\int_{0}^{a} x(t)dt \tag{1.75a}$$

$$\sum_{n=-k}^{k} x[n] = x[0] + 2\sum_{n=1}^{k} x[n] \tag{1.75b}$$

(b)如果 $x(t)$和 $x[n]$是奇信号,则

$$x(0) = 0 \quad 且 \quad x[0] = 0 \tag{1.76}$$

$$\int_{-a}^{a} x(t) = 0 \quad 且 \quad \sum_{n=-k}^{k} x[n] = 0 \tag{1.77}$$

[redacted] (a)

$$\int_{-a}^{a} x(t)dt = \int_{-a}^{0} x(t)dt + \int_{0}^{a} x(t)dt$$

在等式右侧的第一项积分中,设 $t = -\lambda$,则

$$\int_{-a}^{0} x(t)dt = \int_{a}^{0} x(-\lambda)(-d\lambda) = \int_{0}^{a} x(-\lambda)d\lambda$$

因为 $x(t)$是偶信号，即 $x(-\lambda)=x(\lambda)$，则

$$\int_{0}^{a} x(-\lambda)d\lambda = \int_{0}^{a} x(\lambda)d\lambda = \int_{0}^{a} x(t)dt$$

因此

$$\int_{-a}^{a} x(t)dt = \int_{0}^{a} x(t)dt + \int_{0}^{a} x(t)dt = 2\int_{0}^{a} x(t)dt$$

类似地

$$\sum_{n=-k}^{k} x[n] = \sum_{n=-k}^{-1} x[n] + x[0] + \sum_{n=1}^{k} x[n]$$

在等式右侧的第一项中，设 $n=-m$，则

$$\sum_{n=-k}^{-1} x[n] = \sum_{m=1}^{k} x[-m]$$

因为 $x[n]$是偶信号，即 $x[-m]=x[m]$，则

$$\sum_{m=1}^{k} x[-m] = \sum_{m=1}^{k} x[m] = \sum_{n=1}^{k} x[n]$$

因此

$$\sum_{n=-k}^{k} x[n] = \sum_{n=1}^{k} x[n] + x[0] + \sum_{n=1}^{k} x[n] = x[0] + 2\sum_{n=1}^{k} x[n]$$

(b)因为 $x(t)$、$x[n]$是奇信号，即 $x(-t)=-x(t)$，$x[-n]=-x[n]$，则

$$x(-0) = -x(0) \qquad x[-0] = -x[0]$$

因此

$$x(-0) = x(0) = -x(0) \Rightarrow x(0) = 0$$
$$x[-0] = x[0] = -x[0] \Rightarrow x[0] = 0$$

类似地

$$\int_{-a}^{a} x(t)dt = \int_{-a}^{0} x(t)dt + \int_{0}^{a} x(t)dt = \int_{0}^{a} x(-\lambda)d\lambda + \int_{0}^{a} x(t)dt$$
$$= -\int_{0}^{a} x(\lambda)d\lambda + \int_{0}^{a} x(t)dt = -\int_{0}^{a} x(t)dt + \int_{0}^{a} x(t)dt = 0$$

且

$$\sum_{n=-k}^{k} x[n] = \sum_{n=-k}^{-1} x[n] + x[0] + \sum_{n=1}^{k} x[n] = \sum_{m=1}^{k} x[-m] + x[0] + \sum_{n=1}^{k} x[n]$$
$$= -\sum_{m=1}^{k} x[m] + x[0] + \sum_{n=1}^{k} x[n] = -\sum_{n=1}^{k} x[n] + x[0] + \sum_{n=1}^{k} x[n]$$
$$= x[0] = 0$$

1.9 证明复指数信号

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

是一个周期信号，其基本周期为 $2\pi/\omega_0$。

[redacted] 根据式(1.7)，如果

$$e^{j\omega_0(t+T)} = e^{j\omega_0 t}$$

则 $x(t)$是周期信号。

因为

$$e^{j\omega_0(t+T)} = e^{j\omega_0 t}e^{j\omega_0 T}$$

必须有

$$e^{j\omega_0 T} = 1 \tag{1.78}$$

如果 $\omega_0=0$，则 $x(t)=1$，是一个 T 为任意值的周期信号。如果 $\omega_0\neq 0$，则要使式(1.78)成立，必须

$$\omega_0 T = m2\pi \quad 或 \quad T = m\frac{2\pi}{\omega_0} \quad m \text{ 为正整数}$$

因此，$x(t)$的基本周期(最小周期)为$2\pi/\omega_0$。

1.10 证明正弦信号

$$x(t) = \cos(\omega_0 t + \theta)$$

是一个周期信号，其基本周期为$2\pi/\omega_0$。

[redacted] 如果

$$\cos[\omega_0(t+T)+\theta] = \cos(\omega_0 t + \theta)$$

则正弦信号$x(t)$是周期信号。

注意到

$$\cos[\omega_0(t+T)+\theta] = \cos[\omega_0 t + \theta + \omega_0 T] = \cos(\omega_0 t + \theta)$$

如果

$$\omega_0 T = m2\pi \quad 或 \quad T = m\frac{2\pi}{\omega_0} \quad m \text{ 为正整数}$$

因此，$x(t)$的基本周期(最小周期)为$2\pi/\omega_0$。

1.11 证明只有在$\Omega_0/2\pi$为有理数时，复指数信号

$$x[n] = e^{j\Omega_0 n}$$

才是一个周期信号。

[redacted] 根据式(1.9)，如果

$$e^{j\Omega_0(n+N)} = e^{j\Omega_0 n}e^{j\Omega_0 N} = e^{j\Omega_0 n}$$

或

$$e^{j\Omega_0 N} = 1 \tag{1.79}$$

则$x(t)$是周期序列。

式(1.79)只有在

$$\Omega_0 N = m2\pi \quad m \text{ 为正整数}$$

或

$$\frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N} \text{ 为有理数} \tag{1.80}$$

下才成立。因此，只有在$\Omega_0/2\pi$为有理数时，$x[n]$才是一个周期序列。

1.12 设$x(t)$是复指数信号

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

其角频率为ω_0，基本周期为$T=2\pi/\omega_0$。如果离散时间序列$x[n]$是通过对$x(t)$以取样间隔T_s进行均匀取样的结果，即

$$x[n] = x(nT_s) = e^{j\omega_0 nT_s}$$

试求出使$x[n]$为周期信号的条件。

[redacted] 如果$x[n]$是一个基本周期为N_0的周期信号，则

$$e^{j\omega_0(n+N_0)T_s} = e^{j\omega_0 nT_s}e^{j\omega_0 N_0 T_s} = e^{j\omega_0 nT_s}$$

因此，必须有

$$e^{j\omega_0 N_0 T_s} = 1$$

$$\omega_0 N_0 T_s = \frac{2\pi}{T_0}N_0 T_s = m2\pi \quad m \text{ 为正整数}$$

或

$$\frac{T_s}{T_0} = \frac{m}{N_0} \text{ 为有理数} \tag{1.81}$$

因此如果取样间隔比率T_s/T_0和$x(t)$的基本周期是有理数，则$x[n]$是周期信号。注意，上面的条件对于正弦信号$x(t)=\cos(\omega_0 t+\theta)$也成立。

1.13 已知正弦信号

$$x(t) = \cos 15t$$

(a)求出使 $x[n]=x[nT_s]$ 为周期序列的取样间隔 T_s。

(b)如果 $T_s=0.1\pi$，求出使 $x[n]=x[nT_s]$ 的基本周期。

解 (a) $x(t)$ 的基本周期为 $T_0=2\pi/\omega_0=2\pi/15$。由式(1.81)，如果

$$\frac{T_s}{T_0}=\frac{T_s}{2\pi/15}=\frac{m}{N_0} \tag{1.82}$$

其中，m 和 N_0 为正整数，则 $x[n]=x[nT_s]$ 为周期序列，因此，要求 T_s 为

$$T_s=\frac{m}{N_0}T_0=\frac{m}{N_0}\frac{2\pi}{15} \tag{1.83}$$

(b)将 $T_s=0.1\pi=\pi/10$ 代入式(1.82)，得

$$\frac{T_s}{T_0}=\frac{\pi/10}{2\pi/15}=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$$

因此，$x[n]=x[nT_s]$ 是周期序列。由式(1.82)

$$N_0=m\frac{T_0}{T_s}=m\frac{4}{3}$$

当 $m=3$ 时，可得到最小正整数 N_0。$x[n]=x(0.1\pi n)$ 的基本周期为 $N_0=4$。

1.14 设 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 是基本周期分别为 T_1 和 T_2 的周期信号。在什么条件下 $x(t)=x_1(t)+x_2(t)$ 是周期信号。如果 $x(t)$ 是周期信号，其基本周期是多少？

解 因为 $x_1(t)$ 和 $x_1(t)$ 是周期信号，其基本周期分别是 T_1 和 T_2，有

$$x_1(t)=x_1(t+T_1)=x_1(t+mT_1)\quad m\text{ 为正整数}$$
$$x_2(t)=x_2(t+T_2)=x_2(t+kT_2)\quad k\text{ 为正整数}$$

因此

$$x(t)=x_1(t+mT_1)+x_2(t+kT_2)$$

为了使 $x(t)$ 是周期为 T 的周期信号，必须有

$$x(t+T)=x_1(t+T)+x_2(t+T)=x_1(t+mT_1)+x_2(t+kT_2)$$

因此，必须有

$$mT_1=kT_2=T \tag{1.84}$$

或

$$\frac{T_1}{T_2}=\frac{k}{m}\text{ 为有理数} \tag{1.85}$$

也就是说，两个周期信号的和信号只有在其周期的比值为有理数时才是周期信号，其基本周期至少是 T_1 和 T_2 的公倍数。如果整数 m 和 k 互为素数，可以用式(1.84)来表示基本周期。如果比值 T_1/T_2 是无理数，则信号 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 没有公共周期，$x(t)$ 不是周期信号。

1.15 设 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 是基本周期分别为 N_1 和 N_2 的周期序列。在什么条件下 $x[n]=x_1[n]+x_2[n]$ 是周期序列。如果 $x[n]$ 是周期序列，其基本周期是多少？

解 因为 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 是周期序列，其基本周期分别是 N_1 和 N_2，有

$$x_1[n]=x_1[n+N_1]=x_1[n+mN_1]\quad m\text{ 为正整数}$$
$$x_2[n]=x_2[n+N_2]=x_2[n+kN_2]\quad k\text{ 为正整数}$$

因此

$$x[n]=x_1[n+mN_1]+x_2[n+kN_2]$$

为了使 $x[n]$ 是周期为 N 的周期序列，必须有

$$x[n+N]=x_1[n+N]+x_2[n+N]=x_1[n+mN_1]+x_2[n+kN_2]$$

因此，必须有

$$mN_1=kN_2=N \tag{1.86}$$

因为总可以找到满足式(1.86)的整数 m 和 k，则两个周期序列的和序列也总是周期序列，并且其基本周期是 N_1 和 N_2 的最小公倍数。

1.16 确定下面每个信号是否是周期信号。如果是，确定其基本周期。

(a) $x(t)=\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$ (b) $x(t)=\sin\frac{2\pi}{3}t$

(c) $x(t)=\cos\frac{\pi}{3}t+\sin\frac{\pi}{4}t$ (d) $x(t)=\cos t+\sin\sqrt{2}t$

(e) $x(t)=\sin^2 t$ (f) $x(t)=e^{j[(\pi/2)t-1]}$

(g) $x[n]=e^{j(\pi/4)n}$ (h) $x[n]=\cos\frac{1}{4}n$

(i) $x[n]=\cos\frac{\pi}{3}n+\sin\frac{\pi}{4}n$ (j) $x[n]=\cos^2\frac{\pi}{8}n$

[redacted] (a)$x(t)=\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\omega_0 t+\frac{\pi}{4}\right)\rightarrow\omega_0=1$

$x(t)$是周期信号，其基本周期 $T_0=2\pi/\omega_0=2\pi$。

(b) $x(t)=\sin\frac{2\pi}{3}t\rightarrow\omega_0=\frac{2\pi}{3}$

$x(t)$是周期信号，其基本周期 $T_0=2\pi/\omega_0=3$。

(c) $x(t)=\cos\frac{\pi}{3}t+\sin\frac{\pi}{4}t=x_1(t)+x_2(t)$

其中 $x_1(t)=\cos(\pi/3)t=\cos\omega_1 t$ 是周期信号，其基本周期 $T_1=2\pi/\omega_1=6$。

$x_2(t)=\sin(\pi/4)t=\sin\omega_2 t$ 是周期信号，其基本周期 $T_2=2\pi/\omega_2=8$。

因为 $T_1/T_2=6/8=3/4$ 是有理数，则 $x(t)$是周期信号，其基本周期 $T_0=4T_1=3T_2=24$。

(d) $x(t)=\cos t+\sin\sqrt{2}t=x_1(t)+x_2(t)$

其中 $x_1(t)=\cos t=\cos\omega_1 t$ 是周期信号，其基本周期 $T_1=2\pi/\omega_1=2\pi$。

$x_2(t)=\sin\sqrt{2}t=\sin\omega_2 t$ 是周期信号，其基本周期 $T_2=2\pi/\omega_2=\sqrt{2}\pi$。

因为 $T_1/T_2=\sqrt{2}$是无理数，则 $x(t)$是非周期信号。

(e)利用三角等式 $\sin^2\theta=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$可得

$$x(t)=\sin^2 t=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2t=x_1(t)+x_2(t)$$

其中 $x_1(t)=\frac{1}{2}$是一个任意周期的直流信号，$x_2(t)=-\frac{1}{2}\cos 2t=-\frac{1}{2}\cos\omega_2 t$ 是周期信号，其基本周期 $T_2=2\pi/\omega_2=\pi$。因此 $x(t)$是周期信号，其基本周期为 $T_0=\pi$。

(f) $x(t)=e^{j[(\pi/2)t-1]}=e^{-1}e^{j(\pi/2)t}=e^{-1}e^{j\omega_0 t}\rightarrow\omega_0=\frac{\pi}{2}$

$x(t)$是周期信号，其基本周期为 $T_0=2\pi/\omega_0=4$。

(g) $x[n]=e^{j(\pi/4)n}=e^{j\Omega_0 n}\rightarrow\Omega_0=\frac{\pi}{4}$

因为 $\Omega_0/2\pi=1/8$ 是有理数，因此 $x(t)$是周期信号。由式(1.55)，其基本周期为 $N_0=8$。

(h) $x[n]=\cos\frac{1}{4}n=\cos\Omega_0 n\rightarrow\Omega_0=\frac{1}{4}$

因为 $\Omega_0/2\pi=1/8\pi$ 不是有理数，因此 $x[n]$不是周期信号。

(i) $x[n]=\cos\frac{\pi}{3}n+\sin\frac{\pi}{4}n=x_1[n]+x_2[n]$

其中

$$x_1[n]=\cos\frac{\pi}{3}n=\cos\Omega_1 n\rightarrow\Omega_1=\frac{\pi}{3}$$

$$x_2[n]=\cos\frac{\pi}{4}n=\cos\Omega_0 n\rightarrow\Omega_2=\frac{\pi}{4}$$

因为 $\Omega_2/2\pi=1/6$(为有理数)，$x_1[n]$是周期信号，其基本周期 $N_1=6$。

因为 $\Omega_2/2\pi=1/8$(为有理数)，$x_2[n]$是周期信号，其基本周期 $N_2=8$。

因此，根据习题 1-15 的结果，$x[n]$是周期信号，其基本周期是 6 和 8 的最小公倍数，即 $N_0=24$。

(j)利用三角等式 $\cos^2\theta=\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$ 可得

$$x[n]=\cos^2\frac{\pi}{8}n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}n=x_1[n]+x_2[n]$$

其中，$x_1[n]=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(1)^n$ 是周期序列，其基本周期为 $N_1=1$。

$x_2(t)=\frac{1}{2}\cos(\pi/4)n=\frac{1}{2}\cos\Omega_2 n\rightarrow\Omega_2=\pi/4$。因为 $\Omega_2/2\pi=1/8$（为有理数），$x_2[n]$ 是周期信号，其基本周期 $N_2=8$。因此 $x[n]$ 是周期信号，其基本周期是 $N_0=8$（N_1 和 N_2 的最小公倍数）。

1.17 证明：对于任意实数 α、β 和 a，如果 $x(t+T)=x(t)$，则

$$\int_\alpha^\beta x(t)dt=\int_{\alpha+T}^{\beta+T}x(t)dt \tag{1.87}$$

$$\int_0^T x(t)dt=\int_0^{a+T}x(t)dt \tag{1.88}$$

[redacted] 如果 $x(t+T)=x(t)$，则设 $t=\tau-T$，得

$$x(\tau-T+T)=x(\tau)=x(\tau-T)$$

且

$$\int_\alpha^\beta x(t)dt=\int_{\alpha+T}^{\beta+T}x(\tau-T)d\tau=\int_{\alpha+T}^{\beta+T}x(\tau)d\tau=\int_{\alpha+T}^{\beta+T}x(t)dt$$

接着，将式(1.88)等式右边写为

$$\int_a^{a+T}x(t)dt=\int_a^0 x(t)dt+\int_0^{a+T}x(t)dt$$

由式(1.87)得

$$\int_a^0 x(t)dt=\int_{a+T}^T x(t)dt$$

则

$$\begin{aligned}\int_0^{a+T}x(x)dt&=\int_{a+T}^T x(t)dt+\int_0^{a+T}x(t)dt\\&=\int_0^{a+T}x(t)dt+\int_{a+T}^T x(t)dt=\int_0^T x(t)dt\end{aligned}$$

1.18 证明：如果 $x(t)$ 是基本周期为 T_0 的周期信号，则式(1.15)定义的 $x(t)$ 的归一化平均功率与任意时间间隔 T_0 的 $x(t)$ 的平均功率是相同的，即

$$P=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}|x(t)|^2dt \tag{1.89}$$

[redacted] 由式(1.15)

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|x(t)|^2dt$$

设 T 是基本周期的整数倍，即 $T=kT_0$，则 $x(t)$ 在间隔 T 内的总归一化能量是一个基本周期内归一化能量的 k 倍，即

$$P=\lim_{T\to\infty}\left[\frac{1}{kT_0}k\int_0^{T_0}|x(t)|^2dt\right]=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}|x(t)|^2dt$$

1.19 下列等式在本书中经常出现，试证明其有效性。

$$\text{(a)}\ \sum_{n=0}^{N-1}\alpha^n=\begin{cases}\dfrac{1-\alpha^N}{1-\alpha} & \alpha\neq 1\\ N & \alpha=1\end{cases} \tag{1.90}$$

$$\text{(b)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n=\frac{1}{1-\alpha}\qquad |\alpha|<1 \tag{1.91}$$

$$\text{(c)}\ \sum_{n=k}^{\infty}\alpha^n=\frac{\alpha^k}{1-\alpha}\qquad |\alpha|<1 \tag{1.92}$$

$$\text{(d)}\ \sum_{n=0}^{\infty}n\alpha^n=\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}\qquad |\alpha|<1 \tag{1.93}$$

[redacted] (a)设

$$S = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = 1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{N-1} \tag{1.94}$$

则

$$\alpha S = \alpha \sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \cdots + \alpha^N \tag{1.95}$$

用式(1.94)减式(1.95),得

$$(1 - \alpha)S = 1 - \alpha^N$$

因此,如果 $\alpha \neq 0$,则

$$S = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \frac{1 - \alpha^N}{1 - \alpha} \tag{1.96}$$

如果 $\alpha = 0$,则由式(1.91),得

$$\sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = N$$

(b) 对于 $|\alpha| < 1$, $\lim_{N\to\infty} \alpha^N = 0$,则由式(1.96),得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} \alpha^n = \lim_{N\to\infty} \frac{1 - \alpha^N}{1 - \alpha} = \frac{1}{1 - \alpha}$$

(c)根据式(1.91),得

$$\sum_{n=k}^{\infty} \alpha^n = \alpha^k + \alpha^{k+1} + \alpha^{k+2} + \cdots$$

$$= \alpha^k (1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots) = \alpha^k \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{\alpha^k}{1 - \alpha}$$

(d)对式(1.91)两端对 α 求导,得

$$\frac{d}{d\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{d}{d\alpha} \left(\frac{1}{1 - \alpha} \right) = \frac{1}{(1 - \alpha)^2}$$

且

$$\frac{d}{d\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{d\alpha} \alpha^n = \sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^{n-1} = \frac{1}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n$$

因此

$$\frac{1}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n = \frac{1}{(1 - \alpha)^2} \quad \text{或} \quad \sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^n = \frac{\alpha}{(1 - \alpha)}$$

1.20 判断下列信号是否是能量信号、功率信号,或者都不是。

(a) $x(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0$　　(b) $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta)$

(c) $x(t) = tu(t)$　　(d) $x[n] = (-0.5)^n u[n]$

(e) $x[n] = u[n]$　　(f) $x[n] = (-0.5)^n u[n]$

[redacted] (a) $E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} e^{-2at} dt = \frac{1}{2a} < \infty$

因此,$x(t)$是能量信号。

(b) 正弦信号 $x(t)$是周期 $T_0 = 2\pi/\omega_0$ 的周期信号,则根据习题 1.18 的结果,$x(t)$的平均功率为

$$P = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} [x(t)]^2 dt = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} A^2 \cos^2(\omega_0 t + \theta) dt$$

$$= \frac{A^2 \omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega_0} \frac{1}{2} [1 + \cos(2\omega_0 t + 2\theta)] dt = \frac{A^2}{2} < \infty$$

因此,$x(t)$是功率信号。注意,一般情况下,周期信号都是功率信号。

(c) $E = \lim_{T\to\infty} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^{T/2} t^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{(T/2)^3}{3} = \infty$

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^{T/2} t^2 dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \frac{(T/2)^3}{3} = \infty$$

因此,$x(t)$既不是能量信号,也不是功率信号。

(d)由定义(1.16),且利用式(1.91),得

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} 0.25^n = \frac{1}{1-0.25} = \frac{4}{3} < \infty$$

因此，$x[n]$是能量信号。

(e) 由定义(1.17)，得

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{N} 1^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}(N+1) = \frac{1}{2} < \infty$$

因此，$x[n]$是功率信号。

(f) 因为$|x[n]| = |2e^{j3n}| = 2|e^{j3n}| = 2$

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} 2^2$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} 4(2N+1) = 4 < \infty$$

因此，$x[n]$是功率信号。

基本信号

1.21 证明

$$u(-t) = \begin{cases} 0 & t > 0 \\ 1 & t < 0 \end{cases} \tag{1.97}$$

[redacted] 设 $\tau = -t$，由定义(1.18)

$$u(-t) = u(\tau) = \begin{cases} 1 & \tau > 0 \\ 0 & \tau < 0 \end{cases}$$

因为 $\tau > 0$ 和 $\tau < 0$ 分别意味着 $t < 0$ 和 $t > 0$，则得

$$u(-t) = \begin{cases} 0 & t > 0 \\ 1 & t < 0 \end{cases}$$

如图 1-26 所示。

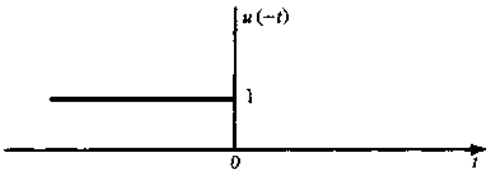


图 1-26

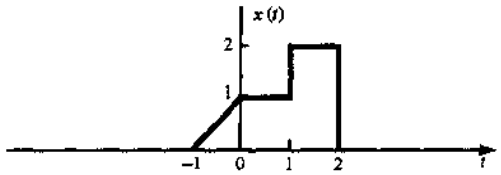


图 1-27

1.22 如图 1-27 所示的连续时间信号 $x(t)$，画出并标明下列信号：

(a) $x(t)u(1-t)$　　(b) $x(t)[u(t)-(t-1)]$　　(c) $x(t)\delta\left(t-\frac{3}{2}\right)$

[redacted] (a)由定义(1.19)

$$u(1-t) = \begin{cases} 1 & t < 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$

$x(t)u(1-t)$如图 1-28(a)所示。

(b)由定义(1.18)和(1.19)

$$u(t) - u(t-1) = \begin{cases} 1 & 0 < t \leqslant 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$x(t)[u(t)-u(t-1)]$如图 1-28(b)所示。

(c)由式(1.26)

$$x(t)\delta\left(t-\frac{3}{2}\right) = x\left(\frac{3}{2}\right)\delta\left(t-\frac{3}{2}\right) = 2\delta\left(t-\frac{3}{2}\right)$$

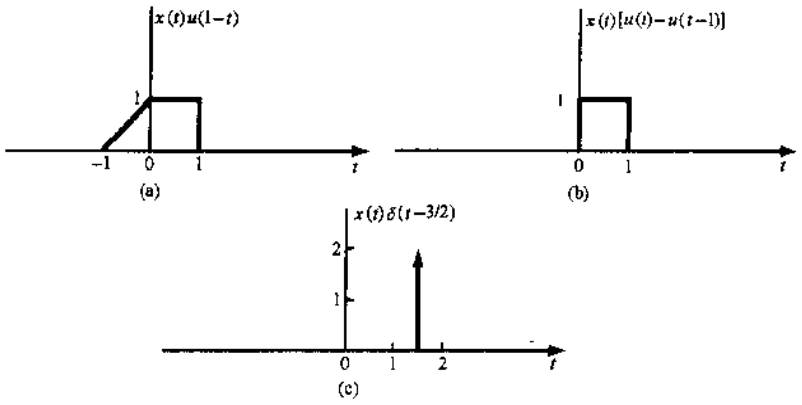


图 1-28

$x(t)\delta\left(t-\frac{3}{2}\right)$如图 1-28(c)所示。

1.23 如图 1-29 所示的离散时间信号$x[n]$,画出并标明下列信号。

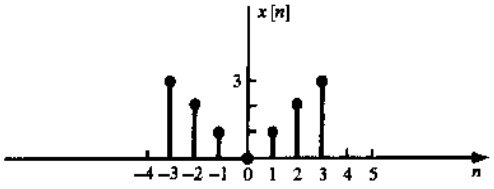


图 1-29

(a) $x[n]u[1-n]$

(b) $x[n]\{u[n+2]-u[n]\}$

(c) $x[n]\delta[n-1]$

(a)由定义(1.44)

$$u[1-n]=\begin{cases}1 & n\leqslant 1\\ 0 & n>1\end{cases}$$

$x[n]u[1-n]$如图 1-30(a)所示。

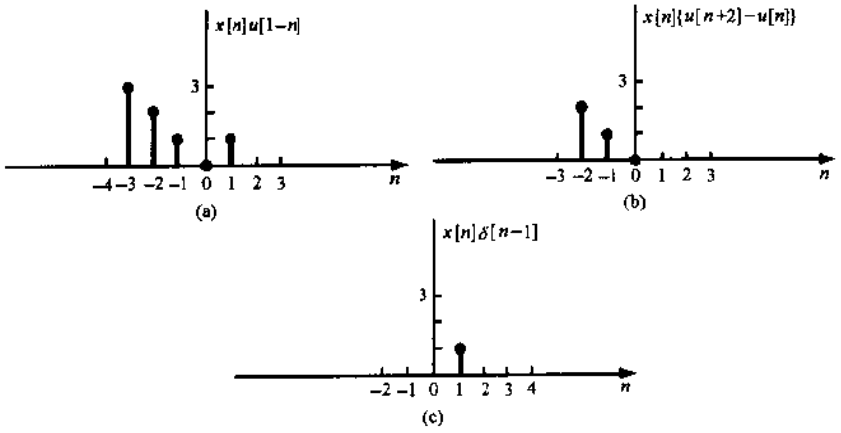


图 1-30

(b)由定义(1.43)和(1.44)

$$u[n+2]-u[n]=\begin{cases}1 & -2\leqslant n<0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$x[n]\{u[n+2]-u[n]\}$如图 1-30(b)所示。

(c) 由定义(1.48)

$$x[n]\delta[n-1]=x[1]\delta[n-1]=\delta[n-1]=\begin{cases}1 & n=1\\ 0 & n\neq 1\end{cases}$$

$x[n]\delta[n-1]$如图 1-30(c)所示。

1.24 单位阶跃函数$u(t)$可以通过以下关系定义为广义函数:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)u(t)dt=\int_{0}^{\infty}\varphi(t)dt \tag{1.98}$$

其中，$\varphi(t)$是一个测试函数，可以在$0<t<\infty$范围内积分。根据此定义证明

$$u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

[redacted] 将式(1.98)重写为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)u(t)dt=\int_{-\infty}^{0}\varphi(t)u(t)dt+\int_{0}^{\infty}\varphi(t)u(t)dt=\int_{0}^{\infty}\varphi(t)dt$$

得

$$\int_{-\infty}^{0}\varphi(t)u(t)dt=\int_{0}^{\infty}\varphi(t)[1-u(t)]dt$$

上式成立的条件是

$$\int_{-\infty}^{0}\varphi(t)u(t)dt=0\quad 且\quad \int_{0}^{\infty}\varphi(t)[1-u(t)]dt=0$$

也就是

$$\varphi(t)u(t)=0\quad t<0\quad 且\quad \varphi(t)[1-u(t)]=0\quad t>0$$

因为$\varphi(t)$是任意的，有

$$u(t)=0\quad t<0\quad 且\quad 1-u(t)=0\quad t>0$$

即

$$u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

1.25 验证式(1.23)和(1.24)，即

(a) $\delta(at)=\dfrac{1}{|a|}\delta(t)$　　(b) $\delta(-t)=\delta(t)$

[redacted] 可以根据以下等效性质来证明：

设$g_1(t)$和$g_2(t)$是广义函数，则对于所定义的测试函数$\varphi(t)$，当且仅当

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)g_1(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)g_2(t)dt \tag{1.99}$$

时，$g_1(t)=g_2(t)$，这就是等效性质。

(a) 对可变的变量，设$at=\tau$，则$t=\tau/a$，$dt=(1/a)d\tau$，可以得到以下等式：

如果$a>0$，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\delta(at)dt=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(\frac{\tau}{a}\right)\delta(\tau)d\tau=\frac{1}{a}\varphi\left(\frac{\tau}{a}\right)_{\tau=0}=\frac{1}{|a|}\varphi(0)$$

如果$a<0$，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\delta(at)dt=\frac{1}{a}\int_{\infty}^{-\infty}\varphi\left(\frac{\tau}{a}\right)\delta(\tau)d\tau=-\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(\frac{\tau}{a}\right)\delta(\tau)d\tau$$

$$=-\frac{1}{a}\varphi\left(\frac{\tau}{a}\right)_{\tau=0}=\frac{1}{|a|}\varphi(0)$$

因此，对任意的a有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\delta(at)dt=\frac{1}{|a|}\varphi(0)$$

现在，对$\varphi(0)$使用式(1.20)，则对任意的$\varphi(t)$得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\delta(at)dt=\frac{1}{|a|}\varphi(0)=\frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\delta(t)dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\frac{1}{|a|}\delta(t)dt$$

由等效性质式(1.99)，得

$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$$

(b) 在上式中设$a=-1$，得

$$\delta(-t)=\frac{1}{|1|}\delta(t)=\delta(t)$$

说明 $\delta(t)$是一个偶函数。

1.26 (a)验证式(1.26):如果 $x(t)$在 $t=t_0$ 时刻是连续的,则

$$x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)$$

(b)验证式(1.25):如果 $x(t)$在 $t=0$ 时刻是连续的,则

$$x(t)\delta(t)=x(0)\delta(t)$$

[redacted] (a)如果 $x(t)$在 $t=t_0$ 时刻是连续的,则对于在 $t=t_0$ 时刻连续的所有 $\varphi(t)$,由定义(1.22)得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)[x(t)\delta(t-t_0)]dt=\int_{-\infty}^{\infty}[\varphi(t)x(t)]\delta(t-t_0)dt=\varphi(t_0)x(t_0)$$

$$=x(t_0)\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\delta(t-t_0)dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)[x(t_0)\delta(t-t_0)]dt$$

因此,由等效性质(1.99)可得

$$x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)$$

(b)设上式中 $t_0=0$,得

$$x(t)\delta(t)=x(0)\delta(t)$$

1.27 证明:

(a) $t\delta(t)=0$

(b) $\sin t\delta(t)=0$

(c) $\cos t\delta(t-\pi)=-\delta(t-\pi)$

[redacted] 利用式(1.25)和(1.26)得

(a) $t\delta(t)=(0)\delta(t)=0$

(b) $\sin t\delta(t)=(\sin 0)\delta(t)=(0)\delta(t)=0$

(c) $\cos t\delta(t-\pi)=(\cos\pi)\delta(t-\pi)=(-1)\cdot\delta(t-\pi)=-\delta(t-\pi)$

1.28 验证式(1.30):

$$\delta(t)=u'(t)=\frac{du(t)}{dt}$$

[redacted] 由式(1.28)得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)u'(t)dt=-\int_{-\infty}^{\infty}\varphi'(t)u(t)dt \tag{1.100}$$

其中,$\varphi(t)$是测试函数,在 $t=0$ 时刻连续,在某个固定间隔之外不存在。因此,$\varphi'(t)$存在,在 $0<t<\infty$范围内可积,且 $\varphi(\infty)=0$。则使用式(1.98)或定义(1.18),得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)u'(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi'(t)dt=-\varphi(t)\Big|_0^{\infty}=-[\varphi(\infty)-\varphi(0)]$$

$$=\varphi(0)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\delta(t)dt$$

因为 $\varphi(t)$是任意的,由等效性质(1.99),得

$$\delta(t)=u'(t)=\frac{du(t)}{dt}$$

1.29 证明下列有关 $\delta(t)$导数的性质:

(a) $\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\delta'(t)dt=-\varphi'(0)$,其中 $\varphi'(0)=\left.\frac{d\varphi(t)}{dt}\right|_{t=0}$ (1.101)

(b) $t\delta'(t)=-\delta(t)$ (1.102)

[redacted] (a)利用式(1.28)和(1.20),得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\delta'(t)dt=-\int_{\infty}^{\infty}\varphi'(t)\delta(t)dt=-\varphi'(0)$$

(b)利用式(1.101)和(1.20),得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)[t\delta'(t)]dt=-\int_{-\infty}^{\infty}[t\varphi(t)]\delta'(t)dt=-\frac{d}{dt}[t\varphi(0)]\mid_{t=0}$$
$$=-[\varphi(t)+t\varphi'(t)]\mid_{t=0}=-\varphi(0)$$
$$=-\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\delta(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)[-\delta(t)]dt$$

因此,由等效性质(1.99)可得

$$t\delta'(t)=-\delta(t)$$

1.30 计算下列积分:

(a) $\int_{-1}^{1}(3t^2+1)\delta(t)dt$

(b) $\int_{1}^{2}(3t^2+1)\delta(t)dt$

(c) $\int_{-\infty}^{\infty}(t^2+\cos\pi t)\delta(t-1)dt$

(d) $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t}\delta(2t-2)dt$

(e) $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t}\delta'(t)dt$

[redacted] (a)由式(1.21),其中 $a=-1,b=1$,得

$$\int_{-1}^{1}(3t^2+1)\delta(t)dt=(3t^2+1)\mid_{t=0}=1$$

(b)由式(1.21),其中 $a=1,b=2$,得

$$\int_{1}^{2}(3t^2+1)\delta(t)dt=0$$

(c)由式(1.22),得

$$\int_{-\infty}^{\infty}(t^2+\cos\pi t)\delta(t-1)dt=(t^2+\cos\pi t)\mid_{t=1}=1+\cos\pi=1-1=0$$

(d)由式(1.22)和(1.23),得

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t}\delta(2t-2)dt=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t}\delta[2(t-1)]dt$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t}\frac{1}{|2|}\delta(t-1)dt=\frac{1}{2}e^{-t}\Big|_{t=1}=\frac{1}{2e}$$

(e)由式(1.29),得

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t}\delta'(t)dt=-\frac{d}{dt}(d^{-t})\Big|_{t=0}=e^{-t}\Big|_{t=0}=1$$

1.31 求出并画出下列信号的一阶导数:

(a) $x(t)=u(t)-u(t-a),\ a>0$

(b) $x(t)=t[u(t)-u(t-a)],\ a>0$

(c) $x(t)=\mathrm{sgn}t=\begin{cases}1 & t>0\\ -1 & t<0\end{cases}$

[redacted] (a)由式(1.30),得

$$u'(t)=\delta(t)\quad 且\quad u'(t-a)=\delta(t-a)$$

则

$$x'(t)=u'(t)-u'(t-a)=\delta(t)-\delta(t-a)$$

信号 $x(t)$ 和 $x'(t)$ 如图 1-31(a)所示。

(b)利用两个函数之积的微分原则以及(a)的结果,得

$$x'(t)=[u(t)-u(t-a)]+t[\delta(t)-\delta(t-a)]$$

但是,由式(1.25)和(1.26)

$$t\delta(t)=(0)\delta(t)=0\quad 且\quad t\delta(t-a)=a\delta(t-a)$$

因此

$$x'(t) = u(t) - u(t-a) - a\delta(t-a)]$$

信号 $x(t)$和 $x'(t)$如图 1-31(b)所示。

(c) $x(t)=\text{sgn}t$ 可以重写为

$$x(t) = \text{sgn}t = u(t) - u(-t)$$

则利用式(1.30),得

$$x'(t) = u'(t) - u'(-t) = \delta(t) - [-\delta(t)] = 2\delta(t)$$

信号 $x(t)$和 $x'(t)$如图 1-31(c)所示。

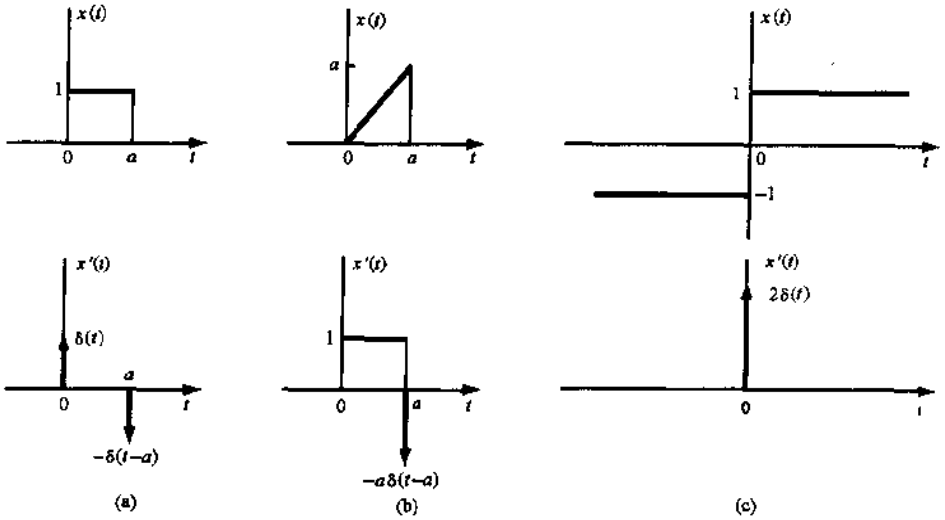


图 1-31

系统及其分类

1.32 如图 1-32 所示的 RC 电路,求出输入 $x(t)$和输出 $y(t)$之间的关系。

(a) 如果 $x(t)=v_i(t), y(t)=v_c(t)$

(b) 如果 $x(t)=v_s(t), y(t)=i(t)$

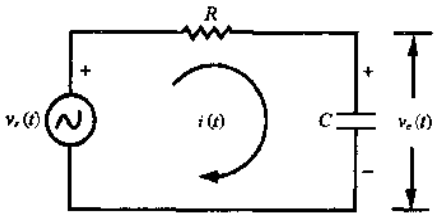


图 1-32

(a)对图 1-32 中的 RC 电路使用基尔霍夫电压定律,得

$$v_i(t) = Ri(t) + v_c(t) \qquad (1.103)$$

电流 $i(t)$和电压 $v_c(t)$的关系为

$$i(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt} \qquad (1.104)$$

设 $v_i(t)=x(t), v_c(t)=y(t)$,将式(1.104)代入式(1.103),得

$$RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

或

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t) \qquad (1.105)$$

因此,RC 电路的输入-输出关系可以用一阶常系数线性微分方程来描述。

(b) 对式(1.104)求积分,得

$$v_c(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau \qquad (1.106)$$

将式(1.106)代入式(1.103),设 $v_i(t)=x(t), v_c(t)=y(t)$,得

$$Ry(t) + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau = x(t)$$

或

$$y(t) + \frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau = \frac{1}{R}x(t)$$

对上面的等式两端求 t 的微分，得

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{R}\frac{dx(t)}{dt} \tag{1.107}$$

因此，*RC* 电路的输入-输出关系还可以用另一个一阶常系数线性微分方程来描述。

1.33 如图 1-33 所示的电容。设输入 $x(t)=i(t)$，输出 $y(t)=v_c(t)$。

(a)找出输入-输出关系。

(b)确定系统是(i)无记忆的(ii)因果的(iii)线性的(iv)时不变的(v)稳定的。

解 (a)假设电容 C 是常数。电容两端的输出电压 $y(t)$和输入电流 $x(t)$的关系为[式(1.106)]

$$y(t) = \mathbf{T}[x(t)] = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \tag{1.108}$$

(b) (i)由式(1.108)可以看出，输出 $y(t)$取决于当前和过去的输入值。因此，系统是无记忆的。

(ii)因为输出 $y(t)$不取决于将来的输入值。因此，系统是因果的。

(iii)设 $x(t)=a_1x_1(t)+a_2x_2(t)$，则

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathbf{T}[x(t)] = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}[a_1x_1(\tau)+a_2x_2(\tau)]d\tau \\ &= a_1\left[\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}x_1(\tau)d\tau\right]+a_2\left[\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}x_2(\tau)d\tau\right] \\ &= a_1y_1(t)+a_2y_2(t) \end{aligned}$$

因此，满足叠加性质(1.68)，系统是线性的。

(iv)设 $y_1(t)$是由平移的输入电流 $x_1(t)=x(t-t_0)$产生的，则

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \mathbf{T}[x(t-t_0)] = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}x(\tau-t_0)d\tau \\ &= \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t-t_0}x(\lambda)d\lambda = y(t-t_0) \end{aligned}$$

因此，系统是时不变的。

(v)设 $x(t)=k_1u(t)$，且 $k_1\neq 0$，则

$$y(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}k_1u(\tau)d\tau = \frac{k_1}{C}\int_{0}^{t}d\tau = \frac{k_1}{C}tu(t) = \frac{k_1}{C}r(t) \tag{1.109}$$

其中，$r(t)=tu(t)$，称为单位斜坡函数(见图 1-34)。因为 $y(t)$随时间线性增加，因此，系统是非 BIBO 稳定的。



图 1-33

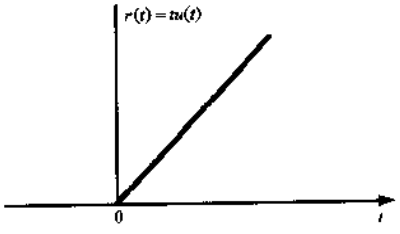


图 1-34

1.34 如图 1-35 所示的系统。确定系统是(a)无记忆的(b)因果的(c)线性的(d)时不变的(e)稳定的。

解 (a)由图 1-35，得

$$y(t) = \mathbf{T}[x(t)] = x(t)\cos\omega_c t$$

因为输出 $y(t)$的值仅取决于输入 $x(t)$当前和过去的值。因此，系统是无记忆的。

(b)因为输出 $y(t)$不取决于输入 $x(t)$将来的值。因此，系统是因果的。

(c)设 $x(t)=a_1x_1(t)+a_2x_2(t)$，则

$$y(t) = \mathbf{T}[x(t)] = [a_1x_1(t)+a_2x_2(t)]\cos\omega_c t$$

$$= a_1x_1(t)\cos\omega_c t + a_2x_2(t)\cos\omega_c t$$
$$= a_1y_1(t) + a_2y_2(t)$$

因此，满足叠加性质(1.68)，系统是线性的。

(d)设 $y_1(t)$是由平移的输入 $x_1(t) = x(t - t_0)$产生的，则

$$y_1(t) = \mathbf{T}\{x(t - t_0)\} = x(t - t_0)\cos\omega_c t$$

但是

$$y(t - t_0) = x(t - t_0)\cos\omega_c(t - t_0) \neq y_1(t)$$

因此，系统是非时不变的。

(e)因为$|\cos\omega_c t| \leqslant 1$，则

$$|y(t)| = |x(t)\cos\omega_c t| \leqslant |x(t)|$$

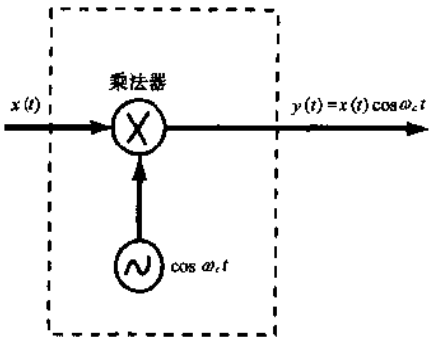


图 1-35

因此，如果输入 $x(t)$是有界的，输出 $y(t)$也是有界的，系统是 BIBO 稳定的。

1.35 一个系统的输入-输出关系如下：

$$y(t) = \mathbf{T}\{x\} = x^2 \tag{1.110}$$

证明系统是非线性的。

[redacted]

$$\mathbf{T}\{x_1 + x_2\} = (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2$$
$$\neq \mathbf{T}\{x_1\} + \mathbf{T}\{x_1\} = x_1^2 + x_2^2$$

因此，系统是非线性的。

1.36 如图 1-36 所示的离散时间系统称为单位延迟单元。确定系统是(a)无记忆的(b)因果的(c)线性的(d)时不变的(e)稳定的。

[redacted] (a)系统的输入-输出关系如下：

$$y[n] = \mathbf{T}\{x[n]\} = x[n - 1] \tag{1.111}$$

因为在 n 处的输出值仅取决于在$n-1$ 处的输入值。因此，系统是无记忆的。

(b)因为输出不取决于将来的输入值。因此，系统是因果的。

(c)设 $x[n] = a_1x_1[n] + a_2x_2[n]$，则

$$y[n] = \mathbf{T}\{a_1x_1[n] + a_2x_2[n]\} = a_1x_1[n - 1] + a_2x_2[n - 1]$$
$$= a_1y_1[n] + a_2y_2[n]$$

因此，满足叠加性质(1.68)，系统是线性的。

(d)设 $y_1[n]$是对 $x_1[n] = x[n - n_0]$的响应，则

$$y_1[n] = \mathbf{T}\{x_1[n]\} = x_1[n - 1] = x[n - 1 - n_0]$$

且

$$y[n - n_0] = x[n - n_0 - 1] = x[n - 1 - n_0] = y_1[n]$$

因此，系统是时不变的。

(e)如果对于所有的 n 有$|x[n]| \leqslant k$，则

$$|y[n]| = |x[n - 1]| \leqslant k$$

因此，系统是 BIBO 稳定的。

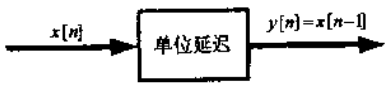


图 1-36 单位延迟单元

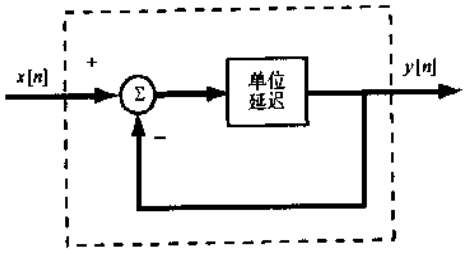


图 1-37

1.37 求出如图 1-37 所示反馈系统的输入-输出关系。

[redacted] 由图 1-37,单位延迟单元的输入为 $x[n]-y[n]$。因此,单位延迟单元的输出 $y[n]$ 为[式(1.111)]

$$y[n] = x[n-1] - y[n-1]$$

整理后,得

$$y[n] + y[n-1] = x[n-1] \tag{1.112}$$

因此,该系统的输入-输出可以用一阶常系数差分方程来描述。

1.38 一个系统有如下输入-输出关系:

$$y[n] = \mathbf{T}\{x[n]\} = nx[n] \tag{1.113}$$

确定系统是(a)无记忆的(b)因果的(c)线性的(d)时不变的(e)稳定的。

[redacted] (a)因为在 n 处的输出值仅取决于在 n 处的输入值。因此,系统是无记忆的。

(b)因为输出不取决于将来的输入值。因此,系统是因果的。

(c)设 $x[n]=a_1x_1[n]+a_2x_2[n]$,则

$$\begin{aligned} y[n] &= \mathbf{T}\{x[n]\} = n\{a_1x_1[n] + a_2x_2[n]\} \\ &= a_1nx_1[n] + a_2nx_2[n] \\ &= a_1y_1[n] + a_2y_2[n] \end{aligned}$$

因此,满足叠加性质(1.68),系统是线性的。

(d)设 $y_1[n]$ 是对 $x_1[n]=x[n-n_0]$ 的响应,则

$$y_1[n] = \mathbf{T}\{x[n-n_0]\} = nx[n-n_0]$$

但

$$y[n-n_0] = (n-n_0)x[n-n_0] \neq y_1[n]$$

因此,系统是时不变的。

(e)设 $x[n]=u[n]$,则 $y[n]=nu[n]$。因此,有界的单位阶跃序列产生无界的递增输出序列(如图 1-38),系统是非 BIBO 稳定的。

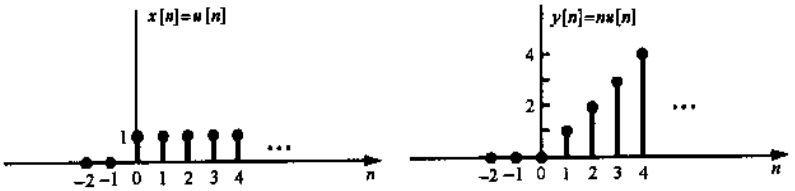


图 1-38

1.39 一个系统有如下输入-输出关系:

$$y[n] = \mathbf{T}\{x[n]\} = x[k_0n] \tag{1.114}$$

其中,k_0 是正整数。该系统是时不变的吗?

[redacted] 设 $y_1[n]$ 是对 $x_1[n]=x[n-n_0]$ 的响应,则

$$y_1[n] = \mathbf{T}\{x_1[n]\} = x_1[k_0n] = x[k_0n - n_0]$$

但

$$y[n-n_0] = x[k_0(n-n_0)] \neq y_1[n]$$

因此,除 $k_0=0$ 之外,系统不是时不变的。注意,式(1.114)描述的系统称为压缩器,这种压缩器每次选择输入序列的第 k_0 个取样值来建立输出序列。因此,系统显然是时变的。

1.40 一个系统有用如下线性公式表示的输入-输出

$$y = ax + b \tag{1.115}$$

其中,x 和 y 分别是系统的输入和输出,a 和 b 是常数。该系统是否是线性的?

[redacted] 如果 $b\neq0$,则系统是非线性的,因为 $x=0$ 意味着 $y=b\neq0$。如果 $b=0$,则系统是线性的。

1.41 已知图 1-39 中用 T 表示的系统是时不变的。当系统的输入是 $x_1[n]$、$x_2[n]$ 和 $x_3[n]$ 时,系统的输出是 $y_1[n]$、$y_2[n]$ 和 $y_3[n]$。试确定系统是否是线性的。

[redacted] 由式(1.39)可以看出

$$x_3[n] = x_1[n] + x_2[n-2]$$

因此，如果 T 是线性的，则

$$\mathrm{T}\{x_3[n]\} = \mathrm{T}\{x_1[n]\} + \mathrm{T}\{x_2[n-2]\} = y_1[n] + y_2[n-2]$$

如图 1-40 所示。由图 1-39 和图 1-40，可以看出

$$y_3[n] \neq y_1[n] + y_2[n-2]$$

因此，系统是非线性的。

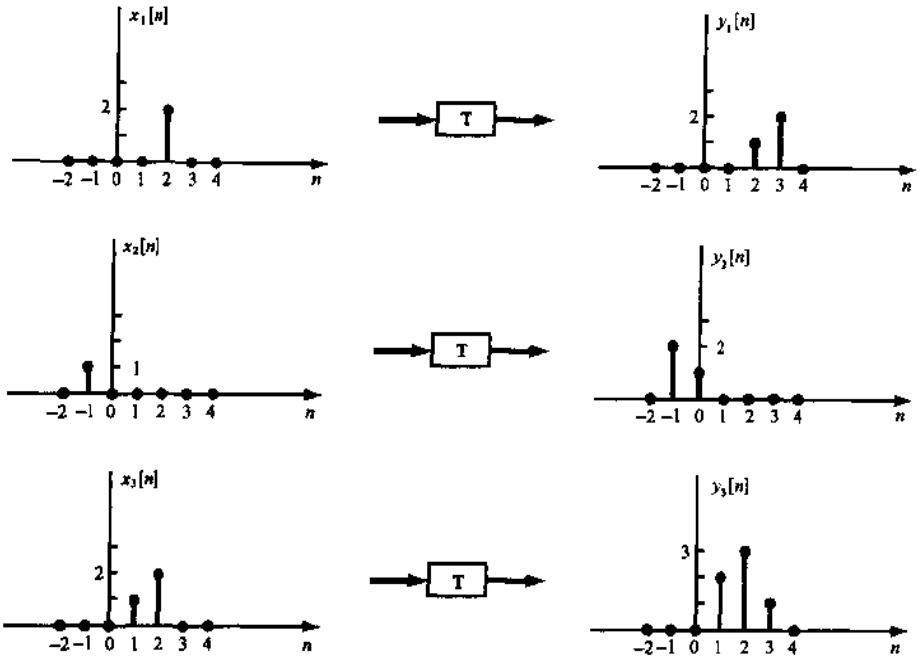


图 1-39

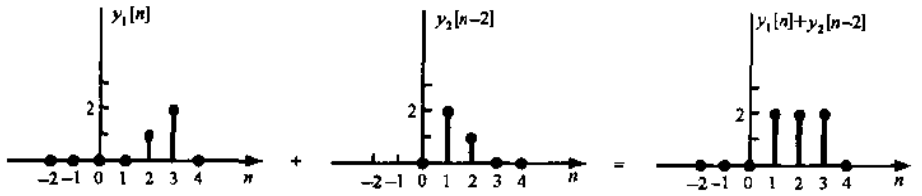


图 1-40

1.42 给出一个满足叠加性式(1.66)但不满足比例性的系统例子。

解 设由算子 T 表示的离散时间系统如下：

$$y[n] = \mathrm{T}\{x[n]\} = x^*[n] \tag{1.116}$$

其中，$x^*[n]$是 $x[n]$的共轭复数

$$\mathrm{T}\{x_1[n] + x_2[n]\} = \{x_1[n] + x_2[n]\}^* = x_1^*[n] + x_2^*[n] = y_1[n] + y_2[n]$$

接下来，如果 α 是任意的复常数，则

$$\mathrm{T}\{\alpha x[n]\} = \{\alpha x[n]\}^* = \alpha^* x^*[n] = \alpha^* y[n] \neq \alpha y[n]$$

因此，系统具有叠加性但无一致性。

1.43 (a) 证明连续时间线性系统的因果性可以等效于以下描述：对于任意的时间 t_0 和任意的输入 $x(t)$，如果在 $t \leqslant t_0$ 时 $x(t)=0$，则这时的输出 $y(t)$也为 0。

(b) 求一个非线性系统，该系统是因果的，但不满足(a)中的条件。

(c) 求一个非线性系统，该系统满足(a)中的条件，但不是因果的。

解 (a) 因为系统是线性的，如果对于所有的 t，有 $x(t)=0$。因此，如果系统是因果的，则在 $t \leqslant t_0$ 时 $x(t)=0$ 意味着 $t \leqslant t_0$ 时 $y(t)=0$。这是必要条件，也可以表示为：设 $x_1(t)$和 $x_2(t)$是系统的

两个输入，$y_1(t)$和$y_2(t)$是对应的输出。如果在$t\leqslant t_0$时$x_1(t)=x_2(t)$，或者在$t\leqslant t_0$时$x(t)=x_1(t)-x_2(t)=0$，则在$t\leqslant t_0$时$y_1(t)=y_2(t)$，或者在$t\leqslant t_0$时$y(t)=y_1(t)-y_2(t)=0$。

(b) 设该系统的输入-输出关系为

$$y(t) = x(t) + 1$$

该系统是非线性的(见习题1.40)且是因果的，因为$y(t)$的值仅取决于当前的$x(t)$值。但是，由于在$t\leqslant t_0$时$x(t)=0$，则在$t\leqslant t_0$时$y(t)=0$。

(c) 设该系统的输入-输出关系为

$$y(t) = x(t)x(t+1)$$

显然，该系统是非线性的(见习题1.35)且是非因果的。因为$y(t)$在t时刻的值取决于在$t+1$时刻输入的$x(t+1)$的值。因此，在$t\leqslant t_0$时$x(t)=0$意味着在$t\leqslant t_0$时$y(t)=0$。

1.44 设T代表连续时间LTI系统，证明

$$\mathbf{T}\{e^{st}\} = \lambda e^{st} \tag{1.117}$$

其中，s是一个复变量，λ是一个复常数。

[redacted] 设输入$x(t)=e^{st}$时的系统输出为$y(t)$，则

$$\mathbf{T}\{e^{st}\} = y(t)$$

因为系统是时不变的，对于任意实数t_0，有

$$\mathbf{T}\{e^{s(t+t_0)}\} = y(t+t_0)$$

因为系统是线性的，有

$$\mathbf{T}\{e^{s(t+t_0)}\} = \mathbf{T}\{e^{st}e^{st_0}\} = e^{st_0}\mathbf{T}\{e^{st}\} = e^{st_0}y(t)$$

因此

$$y(t+t_0) = e^{st_0}y(t)$$

设$t=0$，得

$$y(t_0) = y(0)e^{st_0} \tag{1.118}$$

因为t_0是任意的，将t_0变为t，式(1.118)可以重写如下：

$$y(t) = y(0)e^{st} = \lambda e^{st}$$

或

$$\mathbf{T}\{e^{st}\} = \lambda e^{st}$$

其中，$\lambda = y(0)$。

1.45 设T代表离散时间LTI系统，证明

$$\mathbf{T}\{z^n\} = \lambda z^n \tag{1.119}$$

其中，z是一个复变量，λ是一个复常数。

[redacted] 设输入$x[n]=z^n$时的系统输出为$y[n]$，则

$$\mathbf{T}\{z^n\} = y[n]$$

因为系统是时不变的，对于任意实数n_0，有

$$\mathbf{T}\{z^{n+n_0}\} = y[n+n_0]$$

因为系统是线性的，有

$$\mathbf{T}\{z^{n+n_0}\} = \mathbf{T}\{z^n z^{n_0}\} = z^{n_0}\mathbf{T}\{z^n\} = z^{n_0}y[n]$$

因此

$$y[n+n_0] = z^{n_0}y[n]$$

设$n=0$，得

$$y[n_0] = y[0]z^{n_0} \tag{1.120}$$

因为n_0是任意的，将n_0变为n，式(1.120)可以重写如下：

$$y[n] = y[0]z^n = \lambda z^n$$

或

$$\mathbf{T}\{z^n\} = \lambda z^n$$

其中，$\lambda = y[0]$。

在数学语言中，函数$x(\cdot)$满足式

$$\mathrm{T}\{x(\cdot)\} = \lambda x(\cdot) \tag{1.121}$$

称为算子 T 的特征函数，常数 λ 称为对应特征函数 $x(\cdot)$ 的特征值。因此，式(1.117)和(1.119)表明，复指数函数是任意 LTI 系统的特征函数。

补 充 习 题

1.46 用单位阶跃函数表示如图 1-41 所示的信号。

答案 (a) $x(t)=\frac{t}{2}[u(t)-u(t-2)]$

(b) $x(t)=u(t+1)+2u(t)-u(t-1)-u(t-2)-u(t-3)$

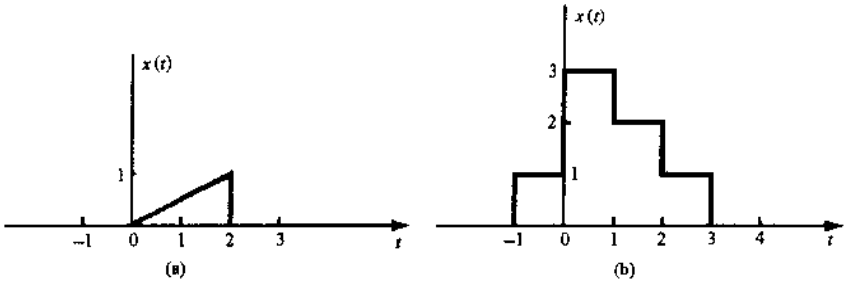


图 1-41

1.47 用单位阶跃函数表示如图 1-42 所示的序列。

答案 (a) $x[n]=u[n]-u[n-(N+1)]$

(b) $x[n]=-u[-n-1]$

(c) $x[n]=u[n+2]-u[n-4]$

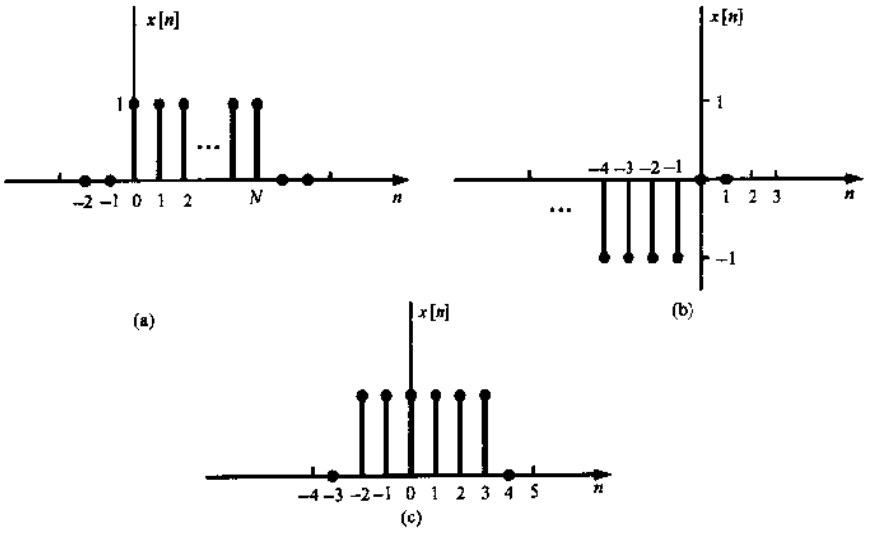


图 1-42

1.48 确定下列信号的奇、偶部分：

(a) $x(t)=u(t)$

(b) $x(t)=\sin\left(\omega_0 t+\frac{\pi}{4}\right)$

(c) $x[n]=e^{j(\Omega_0 n+\pi/2)}$

(d) $x[n]=\delta[n]$

答案 (a) $x_e(t)=\frac{1}{2}$，$x_o(t)=\frac{1}{2}\mathrm{sgn}t$

(b) $x_e(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\omega_0 t$，$x_o(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\omega_0 t$

(c) $x_e[n]=j\cos\Omega_0 n$, $x_o[n]=-\sin\Omega_0 n$

(d) $x_e[n]=\delta[n]$, $x_o[n]=0$

1.49 设任意信号 $x(t)$的奇、偶部分分别用 $x_o(t)$、$x_e(t)$表示。证明：

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^2(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}x_e^2(t)dt+\int_{-\infty}^{\infty}x_o^2(t)dt$$

提示 使用习题 1.7 和式(1.77)的结果。

1.50 设任意信号 $x[n]$的奇、偶部分分别用 $x_o[n]$、$x_e[n]$表示。证明：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x^2[n]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_e^2[n]+\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_o^2[n]$$

提示 使用习题 1.7 和式(1.77)的结果。

1.51 确定下列信号是否是周期信号。如果是，确定其基本周期。

(a) $x(t)=\cos\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)$

(b) $x(t)=\cos^2 t$

(c) $x(t)=(\cos 2\pi t)u(t)$

(d) $x(t)=e^{j\pi t}$

(e) $x[n]=e^{j[(\pi/4)-\pi]}$

(f) $x[n]=\cos\left(\frac{\pi n^2}{8}\right)$

(g) $x[n]=\cos\left(\frac{n}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$

(h) $x[n]=\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi n}{8}\right)-2\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$

答案 (a)周期信号，周期$=\pi$　　(b)周期信号，周期$=\pi$

(c)非周期信号　　(d)周期信号，周期$=2$

(e)非周期信号　　(f)周期信号，周期$=8$

(g)非周期信号　　(h)周期信号，周期$=16$

1.52 证明：如果 $x[n]$是周期为 N 的周期信号，则

(a) $\sum_{k=n_0}^{n}x[k]=\sum_{k=n_0+N}^{n+N}x[k]$　　(b) $\sum_{k=0}^{N}x[k]=\sum_{k=n_0}^{n_0+N}x[k]$

提示 见习题 1.17

1.53 (a) $\delta(2t)$等于什么？

(b) $\delta[2n]$等于什么？

答案 (a) $\delta(2t)=\frac{1}{2}\delta(t)$

(b) $\delta[2n]=\delta[n]$

1.54 证明：

$$\delta'(-t)=-\delta'(t)$$

提示 利用式(1.101)和(1.99)

1.55 计算以下积分：

(a) $\int_{-\infty}^{t}(\cos\tau)u(\tau)d\tau$　　(b) $\int_{-\infty}^{t}(\cos\tau)\delta(\tau)d\tau$

(c) $\int_{-\infty}^{\infty}(\cos t)u(t-1)\delta(t)dt$　　(d) $\int_{0}^{2\pi}t\sin\frac{t}{2}\delta(\pi-t)dt$

答案 (a)$\sin t$

(b)当 $t>0$ 时为 1，当 $t<0$ 时为 0，当 $t=0$ 时无定义。

(c)0

(d)π

1.56 一连续时间系统有如下输入-输出关系：

$$y(t)=\mathrm{T}[x(t)]=\frac{1}{T}\int_{t-T/2}^{t+T/2}x(\tau)d\tau$$

试确定该系统是否是(a)线性的 (b)时不变 (c)因果的。

答案 (a)线性

(b)时不变

(c)非因果

1.57 一连续时间系统有如下输入-输出关系：

$$y(t) = \mathrm{T}\{x(t)\} = \sum_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - kT_s)$$

试确定该系统是否是(a)线性的 (b)时不变。

答案 (a)线性

(b)时变

1.58 一离散时间系统有如下输入-输出关系：

$$y(t) = \mathrm{T}\{x[t]\} = x^2[n]$$

试确定该系统是否是(a)线性的 (b)时不变。

答案 (a)非线性

(b)时不变

1.59 试给出一个满足比例性(1.67)但不满足叠加性的系统。

答案 该系统可以表示如下：

$$y(t) = \mathrm{T}\{x(t)\} = \left[\int_a^b [x(\tau)]^2 d\tau\right]^{1/2}$$

1.60 试给出一个线性时不变系统，要求输入周期信号时，对应的输出是非周期的。

答案 $y[n] = \mathrm{T}\{x[n]\} = nx[n]$

1.61 如果可以通过观察系统的输出信号 y 来惟一地确定输入信号 x，则该系统称为可逆的，如图 1-43 所示。

试确定以下的系统是否是可逆的。如果是，给出其逆系统。

(a) $y(t) = 2x(t)$

(b) $y(t) = x^2(t)$

(c) $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$

(d) $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$

(e) $y[n] = nx[n]$

答案 (a)可逆，$x(t) = \frac{1}{2}y(t)$

(b)不可逆

(c)可逆，$x(t) = \frac{dy(t)}{dt}$

(d)可逆，$x[n] = y[n] - y[n-1]$

(e)不可逆

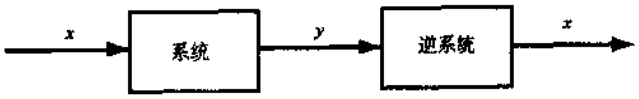


图 1-43

第2章 线性时不变系统

2.1 简介

线性和时不变是系统最重要的两个性质，本章将研究具有这两个性质的系统的基本输入-输出关系。可以看到，用卷积运算可以描述 LTI 系统的输入-输出关系。LTI 系统中卷积运算之所以重要，是由于通过了解 LTI 系统对单位冲激输入的响应，可以了解系统对其他输入信号的响应。另外，本章还要讨论用微分和差分方程表示的 LTI 系统的输入-输出关系。

2.2 连续时间 LTI 系统的响应与卷积积分

A. 冲激响应

一个连续时间 LTI 系统(用 **T** 表示)的冲激响应 $h(t)$可以定义为输入为 $\delta(t)$时的系统响应，即

$$h(t) = \mathbf{T}\{\delta(t)\} \tag{2.1}$$

B. 对任意输入的响应

由式(1.27)，输入 $x(t)$可以表示为

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \tag{2.2}$$

因为系统是线性的，则系统对任意输入 $x(t)$的响应 $y(t)$可以表示为

$$y(t) = \mathbf{T}\{x(t)\} = \mathbf{T}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\mathbf{T}\{\delta(t-\tau)\}d\tau \tag{2.3}$$

因为系统是时不变的，则有

$$h(t-\tau) = \mathbf{T}\{\delta(t-\tau)\} \tag{2.4}$$

将式(2.4)代入式(2.3)，得

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \tag{2.5}$$

式(2.5)表明，连续时间 LTI 系统完全可以用其冲激响应 $h(t)$来表示。

C. 卷积积分

式(2.5)定义了两个连续时间信号 $x(t)$和 $h(t)$的卷积，可以表示为

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \tag{2.6}$$

一般将式(2.6)称为卷积积分。因此，可以得出这样的结论：任意一个连续时间 LTI 系统的输出等于系统的输入与冲激响应的卷积。图2-1表示了冲激响应 $h(t)$的定义以及式(2.6)的关系。



图 2-1 连续时间 LTI 系统

D. 卷积积分的性质

卷积积分有如下性质：

1. 交换性

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t) \tag{2.7}$$

2. 关联性

$$[x(t) * h_1(t)] * h_2(t) = x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] \tag{2.8}$$

3. 分配性

$$x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) \tag{2.9}$$

E. 卷积积分运算

对式(2.6)使用卷积的交换性式(2.7),得

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)]d\tau \tag{2.10}$$

式(2.10)比式(2.6)更容易计算。由式(2.6)可以看出,卷积积分运算包括以下4个步骤:

1. 将冲激响应 $h(\tau)$ 的时间倒过来得 $h(-\tau)$,然后平移 t 时间,得到 $h(t-\tau)=h[-(\tau-t)]$,这是 τ 的函数,其中 t 为参数。

2. t 不变,将 $x(\tau)$ 与 $h(t-\tau)$ 相乘。

3. 对所有的 τ,将乘积 $x(\tau)$ 与 $h(t-\tau)$ 积分,得到一个输出值 $y(t)$。

4. 将 t 从 $-\infty$ 变化到 ∞,重复步骤1~3,得到整个输出 $y(t)$。

以上卷积积分运算的例子在习题2.4~2.6给出。

F. 阶跃响应

一个连续时间LIT系统(用T表示)的阶跃响应 $s(t)$ 可以定义为输入为 $u(t)$ 时的系统响应,即

$$s(t) = \mathbf{T}[u(t)] \tag{2.11}$$

在很多应用中,阶跃响应 $s(t)$ 也是系统的一个有用特性。由式(2.10)很容易确定阶跃响应 $s(t)$,即

$$s(t) = h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau \tag{2.12}$$

因此,阶跃响应 $s(t)$ 可以通过对冲激响应 $h(t)$ 的积分得到。对式(2.12)求对 t 的微分,得

$$h(t) = s'(t) = \frac{ds(t)}{dt} \tag{2.13}$$

因此,冲激响应 $h(t)$ 可以通过对阶跃响应 $s(t)$ 微分确定。

2.3 连续时间LTI系统的性质

A. 记忆系统或无记忆系统

由于无记忆系统的输出 $y(t)$ 仅取决于当前的输入 $x(t)$,如果系统同时也是线性时不变的,则输入-输出的关系只能是

$$y(t) = Kx(t) \tag{2.14}$$

其中K是一个常数。因此,对应的冲激响应 $h(t)$ 为

$$h(t) = K\delta(t) \tag{2.15}$$

如果在 $t_0 \neq 0$ 时,$h(t_0) \neq 0$,则该连续时间LTI系统是记忆系统。

B. 因果性

根据1.5D节的讨论,在输入事件没有发生之前,因果系统不会产生响应。因此,对于一个因果的连续时间LTI系统,有

$$h(t) = 0 \qquad t < 0 \tag{2.16}$$

对式(2.10)使用因果条件式(2.16),则因果的连续时间LTI系统可以表示为

$$y(t) = \int_{0}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \tag{2.17}$$

对式(2.6)使用因果条件式(2.16),有

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \tag{2.18}$$

式(2.18)表明，用于计算输出 $y(t)$ 的输入值 $x(t)$ 只是那些满足 $\tau \leqslant t$ 的输入值。

根据因果条件式(2.16)，任意一个信号 $x(t)$，如果

$$x(t) = 0 \qquad t < 0 \tag{2.19a}$$

则该信号称为是因果的。如果

$$x(t) = 0 \qquad t > 0 \tag{2.19b}$$

则该信号称为是非因果的。

因此，由式(2.17)、(2.18)和(2.19a)，如果一个因果的连续时间 LTI 系统的输入 $x(t)$ 是因果的，则其输出可以表示为

$$y(t) = \int_{0}^{t} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{0}^{t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \tag{2.20}$$

C. 稳定性

LTI 系统的 BIBO(有界输入/有界输出)稳定性可以由其冲激响应确定。可以证明(见习题 2.13)，如果一个连续时间 LTI 系统的冲激响应是绝对可积的，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau < \infty \tag{2.21}$$

则该系统是 BIBO 稳定的。

2.4 连续时间 LTI 系统的特征函数

在第 1 章(习题 1.44)曾看到，用 **T** 表示的连续时间 LTI 系统的特征函数是复指数 e^{st}，其中 s 是复变量。即

$$\mathbf{T}\{e^{st}\} = \lambda e^{st} \tag{2.22}$$

其中 λ 是与 e^{st} 有关的 **T** 的特征值。设式(2.10)中的 $x(t) = e^{st}$，则有

$$\begin{aligned} y(t) = \mathbf{T}\{e^{st}\} &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau = \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)s^{-s\tau}d\tau\right]e^{st} \\ &= H(s)e^{st} = \lambda e^{st} \end{aligned} \tag{2.23}$$

其中

$$\lambda = H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau \tag{2.24}$$

因此，与特征函数 e^{st} 有关的连续时间 LTI 系统的特征值可以由 $H(s)$ 给出。$H(s)$ 是一个复常数，其值由 s 通过式(2.24)确定。注意，根据式(2.23)，$y(0) = H(s)$(见习题 1.44)。

以上结果是第 3 章和第 5 章将讨论的拉普拉斯变换和傅里叶变换的基础。

2.5 用微分方程描述的系统

A. 线性常系数微分方程

一个 N 阶常系数微分方程可以表示为

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \tag{2.25}$$

其中，a_k 和 b_k 是实常数，阶次 N 指式(2.25)中 $y(t)$ 最高阶导数。这种微分方程在描述各种电子、机械、化学和生物系统的输入-输出中起着重要的作用。例如，在习题 1.32 中的 RC 电路中，输入 $x(t) = v_i(t)$ 和输出 $y(t) = v_c(t)$ 的关系可以用一阶常系数微分方程[式(1.05)]表示为

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t)$$

对于一个给定输入 $x(t)$，式(2.25)的完全解为

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t) \tag{2.26}$$

其中，$y_p(t)$是满足式(2.25)的特解，$y_h(t)$是满足下面一致微分方程的一致解(homogeneous)(或 complementary 补解)

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y_h(t)}{dt^k} = 0 \tag{2.27}$$

$y_h(t)$的准确形式由 N 个辅助条件确定。注意，如果不指定辅助条件，式(2.25)不能完全由输入 $x(t)$来确定辅出 $y(t)$。一般地，辅助条件是如下变量在某一点某一时刻的值：

$$y(t), \frac{dy(t)}{dt}, \cdots, \frac{d^{N-1}y(t)}{dt^{N-1}}$$

B. 线性

式(2.25)所定义的系统只有在所有的辅助条件为 0 的情况下才是线性的(见习题 2.21)。如果辅助条件不为 0，则系统的响应 $y(t)$可以表示为

$$y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) \tag{2.28}$$

其中，$y_{zi}(t)$称为零输入响应，是对辅助条件的响应；$y_{zs}(t)$称为零状态响应，是对具有零辅助条件的线性系统的响应。如图 2-2 所示。

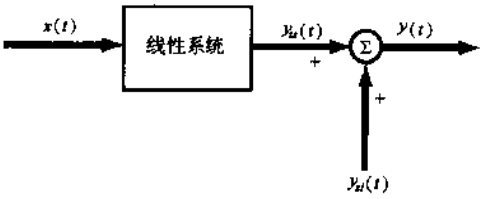


图 2-2 零状态和零输入响应

注意，$y_{zs}(t) \neq y_h(t)$，$y_{zs}(t) \neq y_p(t)$。一般地，$y_{zi}(t)$包含 $y_h(t)$，$y_{zs}(t)$既包含 $y_h(t)$又包含 $y_p(t)$(见习题 2.20)。

C. 因果性

为了证明式(2.25)所描述的系统是因果系统，必须假设初始静态条件(或初始松弛条件)。也就是，如果当 $t \leqslant t_0$ 时 $x(t)=0$，则假设当 $t \leqslant t_0$ 时 $y(t)=0$(见习题 1.43)。因此，$t > t_0$ 时的响应可以用式(2.25)计算，其中的初始条件为

$$y(t_0) = \frac{dy(t_0)}{dt} - \cdots = \frac{d^{N-1}y(t_0)}{dt^{N-1}} = 0$$

其中

$$\frac{d^k y(t_0)}{dt^k} = \left.\frac{d^k y(t)}{dt^k}\right|_{t=t_0}$$

显然，在初始静态时，$y_{zi}(t)=0$。

D. 时不变

对一个线性因果系统，初始静态也意味着时不变(见习题 2.22)。

E. 冲激响应

式(2.25)所描述的连续时间 LTI 系统的冲激响应 $h(t)$满足微分方程

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k h(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k \delta(t)}{dt^k} \tag{2.29}$$

并且满足初始静态的条件。习题 2.23～2.25 是有关冲激响应的例子。下一章，我们将利用变换技术来得到冲激响应。

2.6 离散时间 LTI 系统的响应与卷积积分

A. 冲激响应

一个离散时间 LTI 系统(用 T 表示)的冲激响应 $h(t)$(或单位取样响应)可以定义为输入为 $\delta[n]$时的系统响应，即

$$h[n] = \mathbf{T}\{\delta[n]\} \tag{2.30}$$

B. 对任意输入的响应

由式(1.51),输入 $x[n]$可以表示为

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \tag{2.31}$$

因为系统是线性的,则系统对任意输入 $x[n]$的响应 $y[n]$可以表示为

$$y[n] = \mathbf{T}\{x[n]\} = \mathbf{T}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\right\}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\mathbf{T}\{\delta[n-k]\} \tag{2.32}$$

因为系统是时不变的,则有

$$h[n-k] = \mathbf{T}\{\delta[n-k]\} \tag{2.33}$$

将式(2.33)代入式(2.32),得

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \tag{2.34}$$

式(2.34)表明,离散时间 LTI 系统完全可以用其冲激响应 $h[n]$来表示。

C. 卷积和

式(2.34)定义了两个序列 $x[n]$和 $h[n]$的卷积,可以表示为

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \tag{2.35}$$

式(2.35)一般称为卷积和。因此,可以得出这样的结论:任意一个离散时间 LTI 系统的输出等于系统的输入 $x[n]$与冲激响应 $h[n]$的卷积。



图 2-3 离散时间 LTI 系统

图 2-3 表示了冲激响应 $h[n]$的定义以及式(2.35)的关系。

D. 卷积和的性质

如下的卷积和性质与 2.3 节卷积积分的性质类似。

1. 交换性

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n] \tag{2.36}$$

2. 关联性

$$\{x[n] * h_1[n]\} * h_2[n] = x[n] * \{h_1[n] * h_2[n]\} \tag{2.37}$$

3. 分配性

$$x[n] * \{h_1[n] + h_2[n]\} = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n] \tag{2.38}$$

E. 卷积和运算

对式(2.35)使用卷积和的交换性式(2.36),得

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \tag{2.39}$$

式(2.39)比式(2.35)更容易计算。与连续时间的情况相似,卷积和[式(2.35)]运算包括以下 4 个步骤:

1. 将冲激响应 $h[k]$的时间倒过来得 $h[-k]$,然后平移 n 得到 $h[n-k] = h[-(k-n)]$,这是 k 的函数,其中 n 为参数。

2. n 不变,将 $x[k]$与 $h[n-k]$相乘。

3. 对所有的 τ,求乘积 $x[k]h[n-k]$的和,得到一个输出值 $y[n]$。

4. 使 n 从 $-\infty$变化到∞,重复步骤1~3,得到整个输出 $y[n]$。

以上卷积和运算的例子在习题2.28~2.30给出。

F. 阶跃响应

一个有冲激响应 $h[n]$的离散时间LTI系统的阶跃响应 $s[n]$可以由式(2.39)得到,即

$$s[n] = h[n] * u[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]u[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k] \tag{2.40}$$

由式(2.40)可得

$$h[n] = s[n] - s[n-1] \tag{2.41}$$

式(2.40)和式(2.41)分别是式(2.12)和式(2.13)的离散形式。

2.7 离散时间LTI系统的性质

A. 记忆系统或无记忆系统

由于无记忆系统的输出 $y[n]$仅取决于当前的输入 $x[n]$,所以如果系统同时也是线性时不变的,则系统输入-输出的关系只能是

$$y[n] = Kx[n] \tag{2.42}$$

其中 K 是一个常数。因此,对应的冲激响应为

$$h[n] = K\delta[n] \tag{2.43}$$

如果在 $n_0 \neq 0$ 时,$h[n_0] \neq 0$,则该离散时间LTI系统是记忆系统。

B. 因果性

与连续时间系统类似,一个离散时间LTI系统的因果性为

$$h[n] = 0 \qquad n < 0 \tag{2.44}$$

对式(2.39)使用因果条件式(2.44),则因果的离散时间LTI系统可以表示为

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k] \tag{2.45}$$

对式(2.35)使用因果条件式(2.44),有

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k]x[n-k] \tag{2.46}$$

式(2.46)表明,用于计算输出 $y[n]$的输入 $x[n]$的值只是那些满足 $k \leqslant n$ 的值。

与连续时间系统一样,任意一个序列 $x[n]$,如果

$$x[n] = 0 \qquad n < 0 \tag{2.47a}$$

则称该序列是因果的。如果

$$x[n] = 0 \qquad n \geqslant 0 \tag{2.47b}$$

则称该信号是非因果的。

因此,如果一个因果的离散时间LTI系统的输入 $x[n]$是因果的,则其输出$y[n]$可以表示为

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} h[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^{n} x[k]h[n-k] \tag{2.48}$$

C. 稳定性

可以证明(见习题2.37),如果一个离散时间LTI系统的冲激响应是绝对可求和的,则该系统是BIBO稳定的,即

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty \tag{2.49}$$

2.8 离散时间LTI系统的特征函数

在第1章(习题1.45)曾看到,用 T 表示的离散时间LTI系统的特征函数是复指数 z^n,其中

z 是复变量，即

$$\mathbf{T}\{z^n\} = \lambda z^n \tag{2.50}$$

其中 λ 是与 z^n 有关的 $\mathbf{T}$ 的特征值。设式(2.39)中的 $x[n]=z^n$，则有

$$y[n] = \mathbf{T}\{z^n\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{n-k} = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k}\right]z^n$$

$$= H(z)z^n = \lambda z^n \tag{2.51}$$

其中

$$\lambda = H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k} \tag{2.52}$$

因此，与特征函数 z^n 有关的离散时间 LTI 系统的特征值可以由 $H(z)$给出。$H(z)$是一个复常数，其值由 z 通过式(2.52)确定。注意，根据式(2.51)，$y[0]=H(z)$(见习题 1.45)。

以上结果是第 4 章和第 6 章将讨论的 z-变换和离散时间傅里叶变换的基础。

2.9 用差分方程描述的系统

微分方程在描述连续时间系统中所起的作用在离散时间系统中由差分方程承担。

A. 线性常系数差分方程

微分方程(2.25)的离散时间形式为 N 阶常系数差分方程，表示为

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \tag{2.53}$$

其中，系数 a_k 和 b_k 是实常数，阶次 N 是式(2.53)中 $y[n]$的最大延迟。这种线性常系数差分方程在第 1 章给出了例子(见习题 1.37)。与连续时间的情况类似，式(2.53)的解以及系统的所有性质(如线性、因果性和时不变性)的研究可以比照对微分方程的讨论进行。再次强调一下，如果用式(2.53)描述的系统初始时是静态的，则该系统是因果的。

B. 迭代公式

求解式(2.53)还有一个简单的方法。将式(2.53)重新写成如下形式：

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right\} \tag{2.54}$$

这样就得到了一个根据当前的输入以及过去的输入、输出值计算 n 时刻输出的公式。由式(2.54)可以看出，需要辅助条件，并且如果要从 $n=n_0$ 开始计算 $y[n]$，必须给出 $y[n_0-1]$，$y[n_0-2]$，…，$y[n_0-N]$以及 $n \geqslant n_0-M$ 的 $x[n]$。式(2.54)的一般形式称为迭代公式，因为其指定了根据输入和过去的输出确定输出的迭代过程。在特殊情况下，当 $N=0$ 时，由式(2.53)，得

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]\right\} \tag{2.55}$$

这是无迭代公式，因为计算当前的输出值不需要过去的输出值。因此，在这种情况下，确定 $y[n]$不需要利用辅助条件。

C. 冲激响应

与连续时间情况不同，用式(2.53)描述或由式(2.53)等效描述的离散时间 LTI 系统的冲激响应 $h[n]$可以表示为

$$h[n] = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k \delta[n-k] - \sum_{k=0}^{N} a_k h[n-k]\right\} \tag{2.56}$$

由式(2.55)描述的冲激响应 $h[n]$可以表示为

$$h[n] = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k \delta[n-k]\right\} = \begin{cases} b_n/a_0 & 0 \leqslant n \leqslant M \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \tag{2.57}$$

注意,这种系统的冲激响应有无穷多项。也就是说,在无限长时间内,冲激响应是非零的。

由于有这个性质,由式(2.55)定义的系统称为无限冲激响应(FIR)系统。相反,如果一个系统的冲激响应在有限时间内是非零的,则该系统称为有限冲激响应(IIR)系统。习题2.44和2.45给出了得到冲激响应的例子。在第4章,将使用变换技术来得到冲激响应。

习题解答

连续时间LTI系统的响应与卷积

2.1 验证式(2.36)和式(2.37),即

(a) $x(t)*h(t)=h(t)*x(t)$

(b) $[x(t)*h_1(t)]*h_2(t)=x(t)*[h_1(t)*h_2(t)]$

[redacted] (a)由定义(2.6)

$$x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

改变变量 $t-\tau=\lambda$,得

$$x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\lambda)h(\lambda)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}h(\lambda)x(t-\lambda)d\lambda=h(t)*x(t)$$

(b) 设 $x(t)*h_1(t)=f_1(t)$, $h_1(t)*h_2(t)=f_2(t)$,则

$$f_1(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h_1(t-\tau)d\tau$$

且

$$[x(t)*h_1(t)]*h_2(t)=f_1(t)*h_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\sigma)h_2(t-\sigma)d\sigma$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h_1(\sigma-\tau)d\tau\right]h_2(t-\sigma)d\sigma$$

代入 $\lambda=\sigma-\tau$,交换积分的顺序,有

$$[x(t)*h_1(t)]*h_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\left[\int h_1(\lambda)h_2(t-\tau-\lambda)d\lambda\right]d\tau$$

因为

$$f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h_1(\lambda)h_2(t-\lambda)d\lambda$$

得

$$f_2(t-\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}h_1(\lambda)h_2(t-\tau-\lambda)d\lambda$$

所以,

$$[x(t)*h_1(t)]*h_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$$
$$=x(t)*f_2(t)=x(t)*[h_1(t)*h_2(t)]$$

2.2 证明

(a) $x(t)*\delta(t)=x(t)$ (2.58)

(b) $x(t)*\delta(t-t_0)=x(t-t_0)$ (2.59)

(c) $x(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$ (2.60)

(d) $x(t)*u(t-t_0)=\int_{-\infty}^{t-t_0}x(\tau)d\tau$ (2.61)

[redacted] (a) 由定义(2.6)和式(1.22),有

$$x(t)*\delta(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau=x(\tau)|_{\tau=t}=x(t)$$

(b) 由式(2.7)和式(1.22),有

$$x(t)*\delta(t-t_0)=\delta(t-t_0)*x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\tau-t_0)x(t-\tau)d\tau$$
$$=x(t-\tau)|_{\tau=t_0}=x(t-t_0)$$

(c) 由式(2.6)和式(1.19),有

$$x(t)*u(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)u(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$$

因为 $u(t-\tau)=\begin{cases}1 & \tau<t\\ 0 & \tau>t\end{cases}$

(d) 同样,有

$$x(t)*u(t-t_0)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)u(t-\tau-t_0)d\tau=\int_{-\infty}^{t-t_0}x(\tau)d\tau$$

因为 $u(t-\tau-t_0)=\begin{cases}1 & \tau<t-t_0\\ 0 & \tau>t-t_0\end{cases}$

2.3 设 $y(t)=x(t)*h(t)$,证明

$$x(t-t_1)*h(t-t_2)=y(t-t_1-t_2) \tag{2.62}$$

[redacted] 由式(2.6),有

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau \tag{2.63a}$$

且

$$x(t-t_1)*h(t-t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau-t_1)h(t-\tau-t_2)d\tau \tag{2.63b}$$

设 $\tau-t_1=\lambda$,则 $\tau=\lambda+t_1$,且式(2.63b)变成

$$x(t-t_1)*h(t-t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\lambda)h(t-t_1-t_2-\lambda)d\lambda \tag{2.63c}$$

比较式(2.63a)和(2.63c)可以看出,用 $t-t_1-t_2$ 代替式(2.63a)中的 t 可以得到式(2.63c)。因此,有

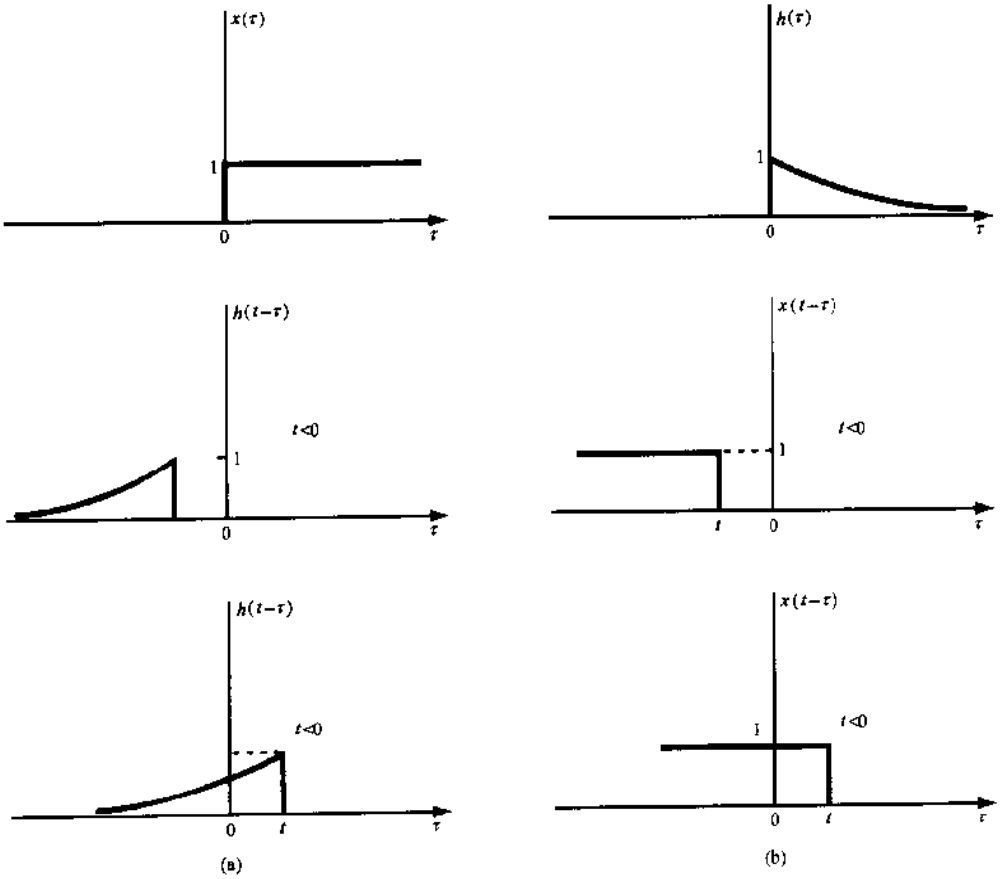
$$x(t-t_1)*h(t-t_2)=y(t-t_1-t_2)$$

2.4 一个连续时间 LTI 系统的输入 $x(t)$和冲激响应 $h(t)$为

$$x(t)=u(t)\qquad h(t)=e^{-at}u(t),\quad a>0$$

(a) 用式(2.6)计算输出 $y(t)$。

(b) 用式(2.10)计算输出 $y(t)$。



(a)　　(b)

图 2.4

[redacted] (a)由式(2.6)

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$t<0$和$t>0$时的函数$x(\tau)$和冲激响应$h(t-\tau)$如图2-4(a)所示。从图2-4(a)可以看出，$t<0$时，$x(\tau)$和$h(t-\tau)$不重叠，而当$t>0$时，$x(\tau)$和$h(t-\tau)$在$\tau=0$到$\tau=t$之间重叠。因此，对$t<0$，有$y(t)=0$，而对$t>0$，有

$$y(t) = \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}d\tau = e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha\tau}d\tau$$

$$= e^{-\alpha t}\frac{1}{\alpha}(e^{\alpha t}-1) = \frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})$$

因此，可以把输出$y(t)$写成

$$y(t) = \frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})u(t) \tag{2.64}$$

(b)由式(2.10)

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

$t<0$和$t>0$时的函数$h(\tau)$和冲激响应$x(t-\tau)$如图2-4(b)所示。从图2-4(b)可以看出，$t<0$时，$h(\tau)$和$x(t-\tau)$不重叠，而当$t>0$时，$h(\tau)$和$x(t-\tau)$在$\tau=0$到$\tau=t$之间重叠。因此，对$t<0$，$y(t)=0$。对$t>0$，有

$$y(t) = \int_0^t e^{-\alpha\tau}d\tau = \frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})$$

因此，可以把输出$y(t)$写成

$$y(t) = \frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})u(t) \tag{2.65}$$

式(2.65)与式(2.64)是相同的。

2.5 一个连续时间系统的冲激响应$h(t)$和输入$x(t)$如下：

$$h(t) = e^{-\alpha t}u(t) \qquad x(t) = e^{-\alpha t}u(-t), \quad \alpha > 0$$

试计算该系统的输出$y(t)$。

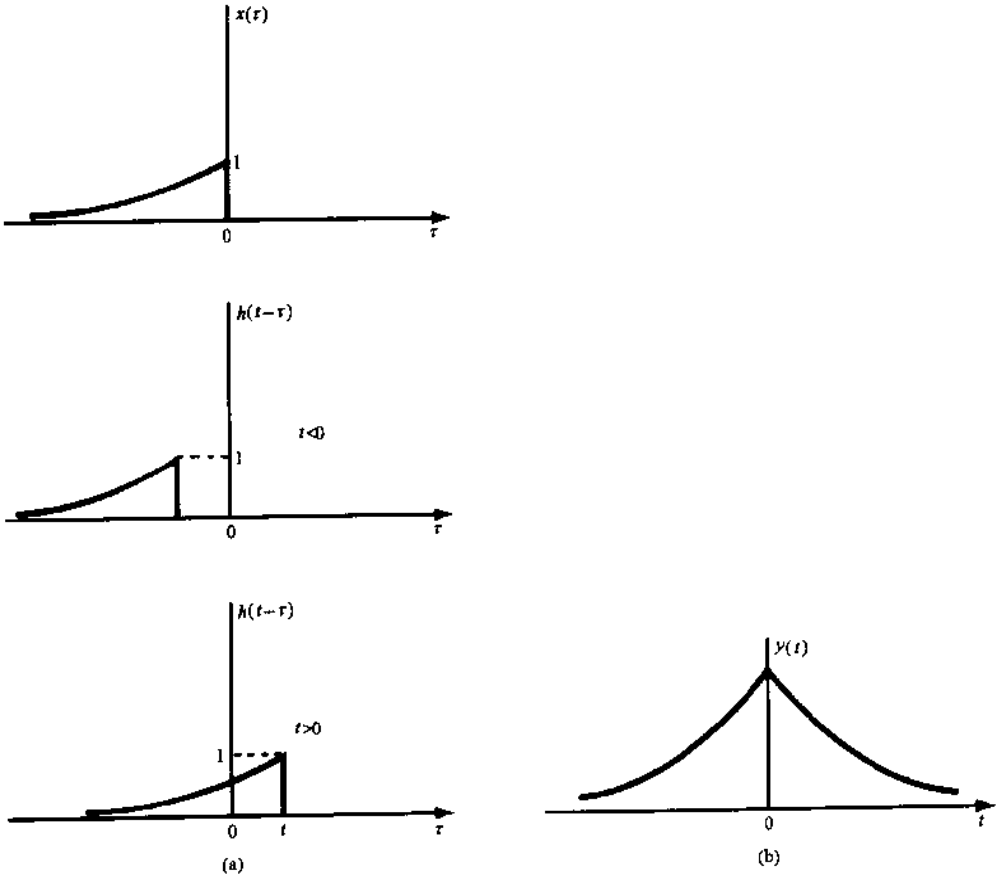


图2-5

[redacted] 由式(2.6)

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$t<0$ 和 $t>0$ 时的函数 $x(\tau)$ 和冲激响应 $h(t-\tau)$ 如图 2-5(a)所示。从图 2-5(a)可以看出，$t<0$ 时，$x(\tau)$ 和 $h(t-\tau)$ 在 $\tau=-\infty$ 到 $\tau=t$ 之间重叠，而当 $t>0$ 时，$h(\tau)$ 和 $x(t-\tau)$ 在 $\tau=-\infty$ 到 $\tau=0$ 之间重叠。因此，对 $t<0$，有

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{\alpha\tau}e^{-\alpha(t-\tau)}d\tau = e^{-\alpha t}\int_{-\infty}^{t} e^{2\alpha\tau}d\tau = \frac{1}{2\alpha}e^{\alpha t} \tag{2.66a}$$

对 $t>0$，有

$$y(t) = \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha\tau}e^{-\alpha(t-\tau)}d\tau = e^{-\alpha t}\int_{-\infty}^{0} e^{2\alpha\tau}d\tau = \frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha t} \tag{2.66b}$$

比较式(2.66a)与式(2.66b)，可以将 $y(t)$ 写成

$$y(t) = \frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha|t|} \qquad \alpha > 0 \tag{2.67}$$

2.6 计算 $y(t)=x(t)*h(t)$，其中 $x(\tau)$ 和 $h(t)$ 如图 2-6 所示。

(a) 用分析方法。

(b) 用图示方法。

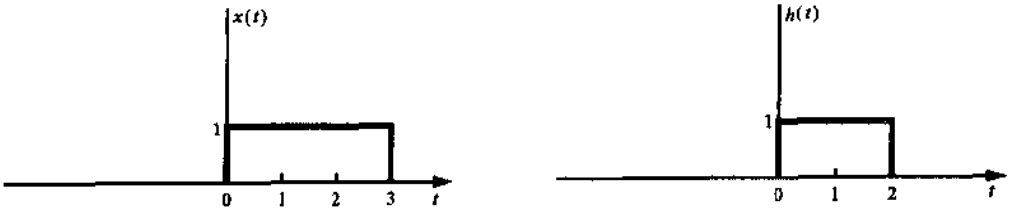


图 2-6

[redacted] (a) 首先将 $x(\tau)$ 和 $h(t)$ 写成函数形式

$$x(t) = u(t) - u(t-3) \qquad h(t) = u(t) - u(t-2)$$

然后，由式(2.6)，有

$$\begin{aligned} y(t) = x(t) * h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [u(\tau) - u(\tau-3)][u(t-\tau) - u(t-\tau-2)]d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)u(t-\tau)d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)u(t-2-\tau)d\tau \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau-3)u(t-\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau-3)u(t-2-\tau)d\tau \end{aligned}$$

因为

$$u(\tau)u(t-\tau) = \begin{cases} 1 & 0<\tau<t, t>0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$u(\tau)u(t-2-\tau) = \begin{cases} 1 & 0<\tau<t-2, t>2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$u(\tau-3)u(t-\tau) = \begin{cases} 1 & 3<\tau<t, t>3 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$u(\tau-3)u(t-2-\tau) = \begin{cases} 1 & 3<\tau<t-2, t>5 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

可以将 $y(t)$ 表示为

$$\begin{aligned} y(t) &= \left(\int_0^t d\tau\right)u(t) - \left(\int_0^{t-2} d\tau\right)u(t-2) \\ &\quad - \left(\int_3^t d\tau\right)u(t-3) + \left(\int_3^{t-2} d\tau\right)u(t-5) \\ &= tu(t) - (t-2)u(t-2) \\ &\quad - (t-3)u(t-3) + (t-5)u(t-5) \end{aligned}$$

如图 2-7 所示。

(b) 不同 t 值下的函数 $h(\tau)$、$x(\tau)$、$h(t-\tau)$ 和 $x(\tau)h(t-\tau)$ 如图 2-8 所示。由图 2-8 可以看出，$t<0$ 和 $t>5$ 时，$x(\tau)$ 和 $h(t-\tau)$ 不重叠，因此，$t<0$ 和 $t>5$ 时，$y(t)=0$。对于其他间隔，$x(\tau)$ 和 $h(t-\tau)$ 重叠。因此，计算这些间隔内矩形脉冲的面积，得

$$y(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ t & 0<t\leqslant 2\\ 2 & 2<t\leqslant 3\\ 5-t & 3<t\leqslant 5\\ 0 & 5<t\end{cases}$$

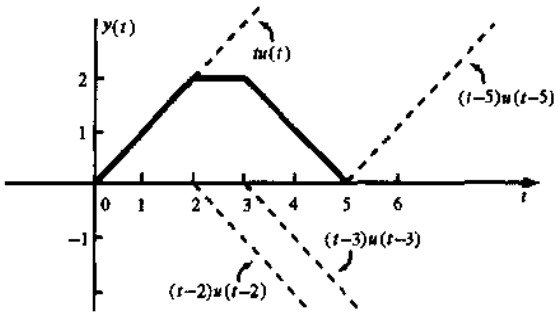


图 2-7

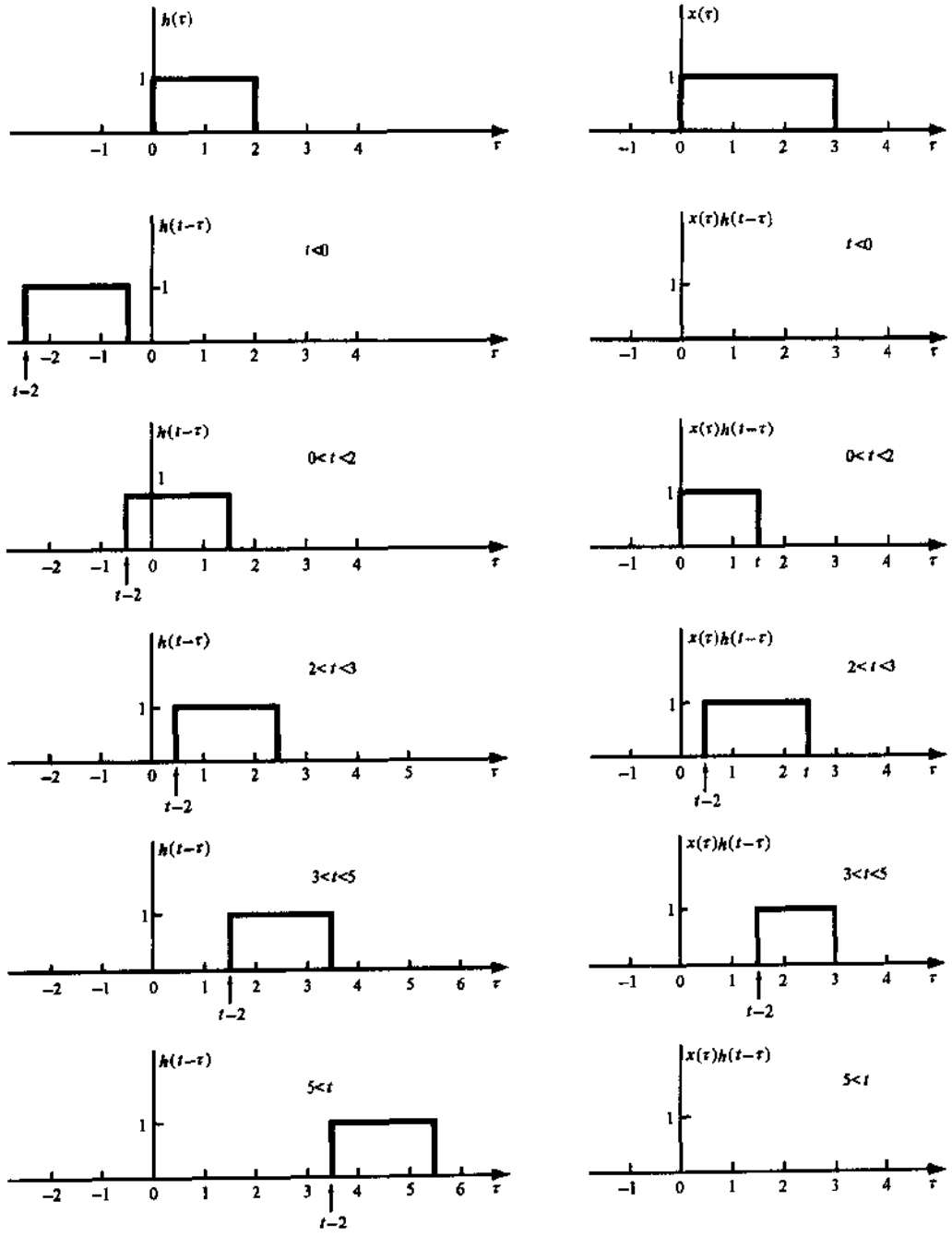


图 2-8

如图 2-9 所示。

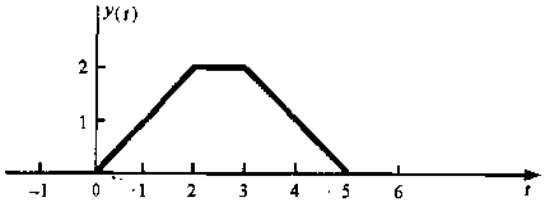


图 2-9

2.7 设 $h(t)$为如图 2-10(a)所示的三角形脉冲，$x(t)$为单位脉冲串[如图 2-10(b)]，表示为

$$x(t) = \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \tag{2.68}$$

试确定并画出当 T 为以下各值时的 $y(t) = h(t) * x(t)$：

(a) $T=3$

(b) $T=5$

(c) $T=1.5$

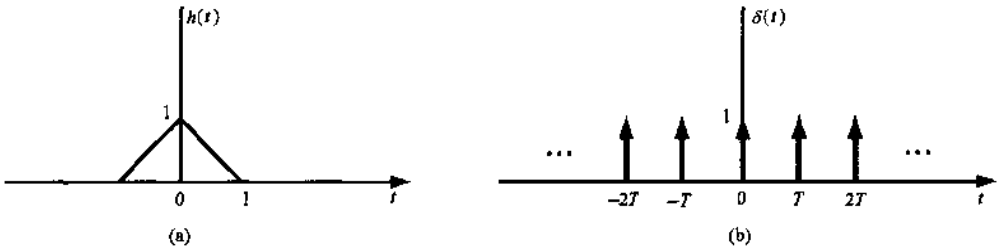


图 2-10

[redacted] 利用式(2.59)和式(2.9)，得

$$y(t) = h(t) * \delta_T(t) = h(t) * \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)\right]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t) * \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t - nT) \tag{2.69}$$

(a)对 $T=3$，式(2.69)变成

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t - 3n)$$

如图 2-11(a)所示。

(b)对 $T=2$，式(2.69)变成

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t - 2n)$$

如图 2-11(b)所示。

(c)对 $T=1.5$，式(2.69)变成

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t - 1.5n)$$

如图 2-11(c)所示。注意，当 $T<2$ 时，三角脉冲不再独立，发生重叠。

2.8 如果 $x_1(t)$和 $x_2(t)$为有公共周期 T_0 的周期信号，$x_1(t)$和 $x_2(t)$的卷积没有重叠。在此情况下，定义 $x_1(t)$和 $x_2(t)$的周期性卷积为

$$f(t) = x_1(t) \otimes x_2(t) = \int_0^{T_0} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau \tag{2.70}$$

(a)证明 $f(t)$是周期信号，周期为 T_0。

(b)证明：对任意 a，有

$$f(t) = \int_a^{a+T_0} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau \tag{2.71}$$

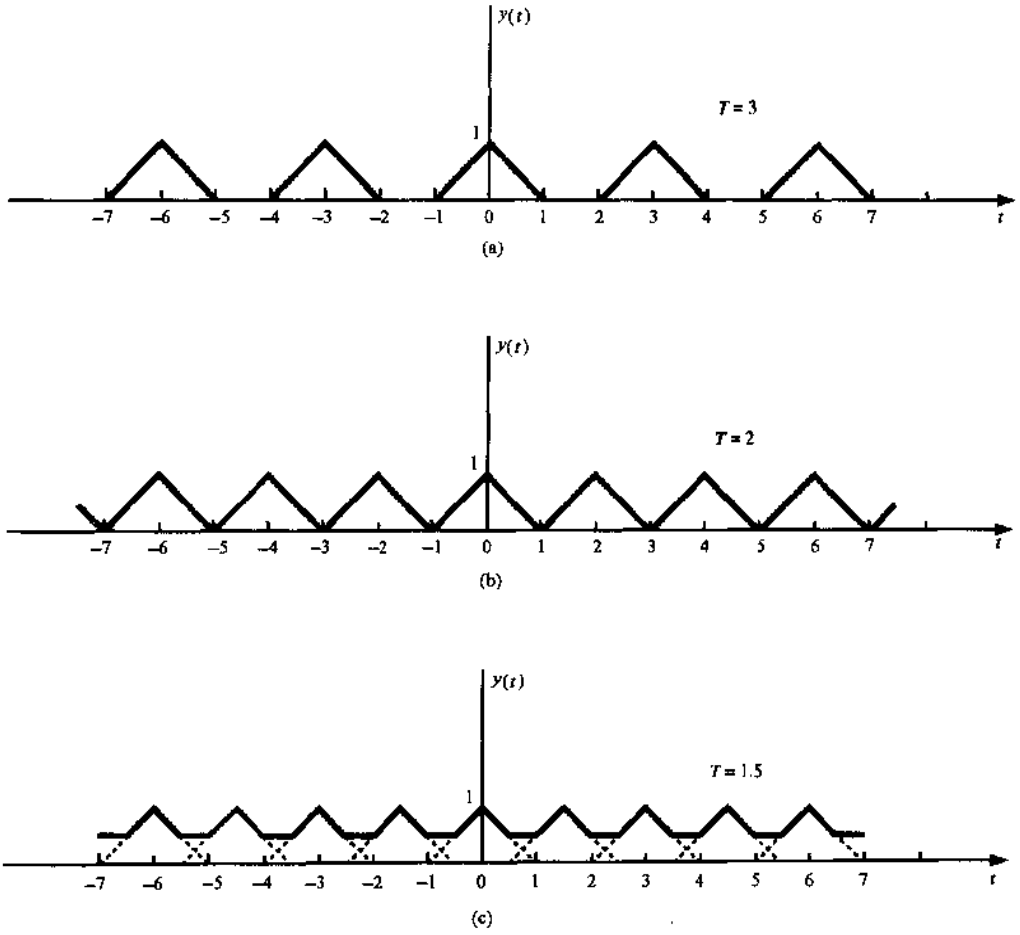


图 2-11

(c)计算并画出如图 2-12 所示方波信号 $x(t)$ 自身的周期性卷积。

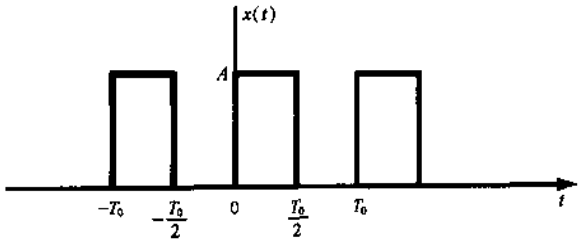


图 2-12

[redacted] (a)因为 $x_2(t)$ 是周期为 T_0 的周期信号,有

$$x_2(t + T_0 - \tau) = x_2(t - \tau)$$

则由式(2.70)得

$$f(t + T_0) = \int_0^{T_0} x_1(\tau)x_2(t + T_0 - \tau)d\tau$$

$$= \int x_1(\tau)x_2(t - \tau)d\tau = f(t)$$

因此,$f(t)$ 是周期为 T_0 的周期信号。

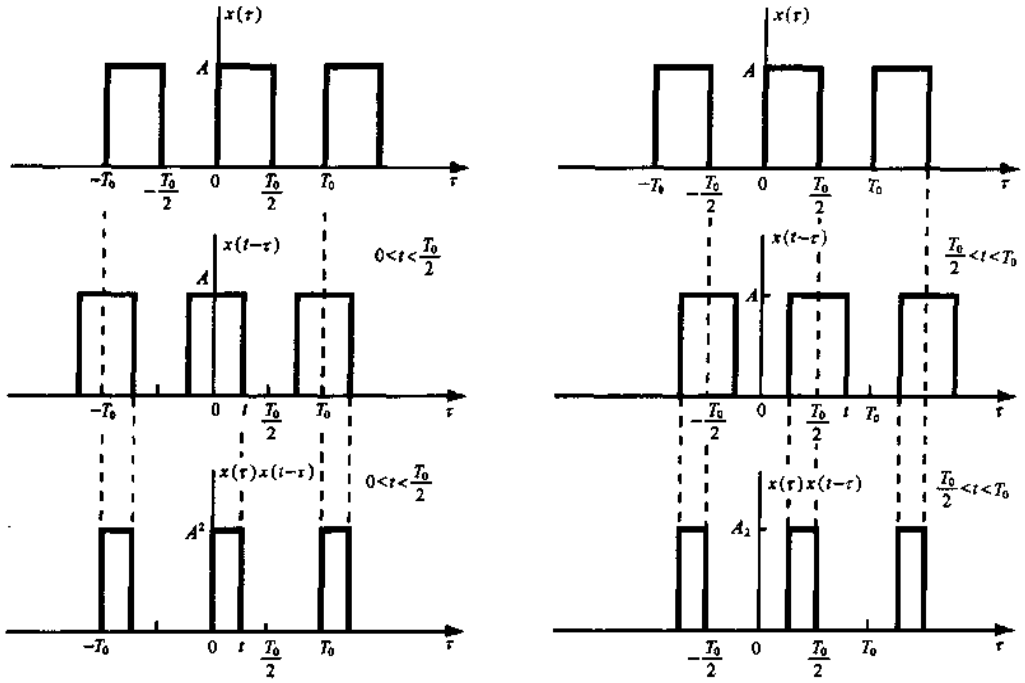
(b)因为 $x_1(\tau)$ 和 $x_2(\tau)$ 为有相同周期 T_0 的周期信号,$x_1(\tau)x_2(t-\tau)$ 也是周期为 T_0 的周期信号。因此,根据性质式(1.88)(见习题 1.17),对任意的 a,得

$$f(t) = \int_0^{T_0} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau = \int_a^{a+T_0} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau$$

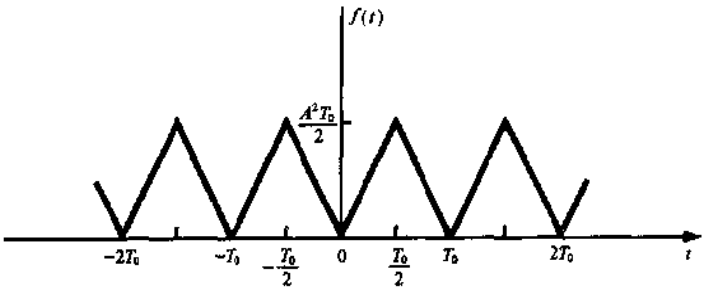
(c)可以用图形方式计算周期性卷积。信号 $x(\tau)$、$x(t-\tau)$和 $x(\tau)x(t-\tau)$如图 2-13(a)所示，由此可得

$$f(t)=\begin{cases}A^2t & 0<t\leqslant T_0/2\\ -A^2(t-T_0) & T_0/2<t\leqslant T_0\end{cases}\quad \text{且}\quad f(t+T_0)=f(t)$$

如图 2-13(b)所示。



(a)



(b)

图 2-13

连续时间 LTI 系统的性质

2.9 图 2-14(a)和(b)所示的信号分别是一个连续时间 LTI 系统的输入 $x(t)$和输出 $y(t)$。画出如下输入的输出：

(a)$x(t-2)$

(b)$\frac{1}{2}x(t)$

[redacted] (a)因为系统是时不变的，输出将为 $y(t-2)$，如图 2-14(c)所示。

(b)因为系统是线性的，输出将为$\frac{1}{2}y(t)$，如图 2-14(d)所示。

2.10 一个连续时间 LTI 系统的阶跃响应如下：

$$s(t)=e^{-t}u(t)$$

确定并画出该系统对图 2-15(a)所示输入 $x(t)$的输出。

[redacted] 由图 2-15(a)，输入 $x(t)$可以表示为

$$x(t) = u(t-1) - u(t-3)$$

因为系统是线性时不变的,则输出 $y(t)$为

$$\begin{aligned} y(t) &= s(t-1) - s(t-3) \\ &= e^{-(t-1)}u(t-1) - e^{-(t-3)}u(t-3) \end{aligned}$$

如图 2-15(b)所示。

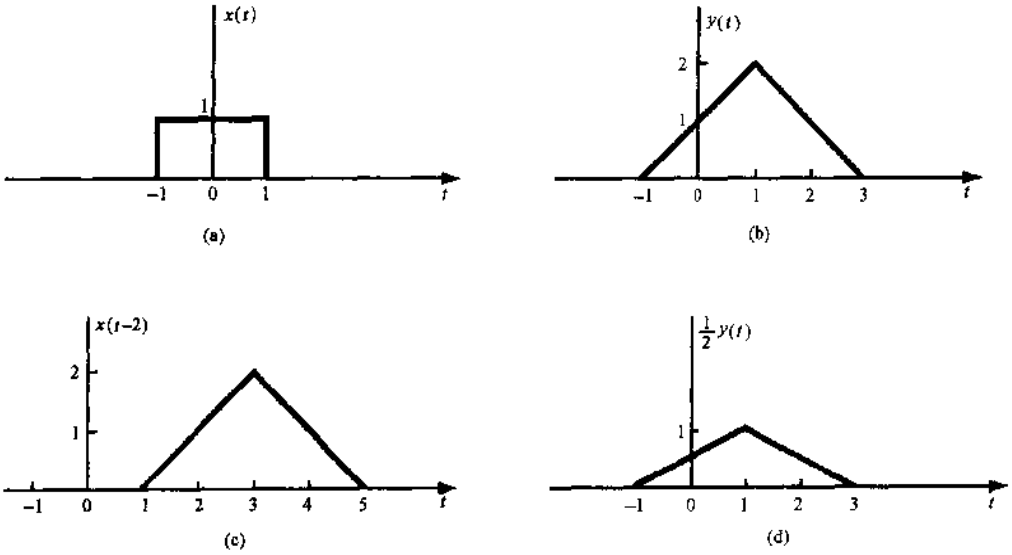


图 2-14

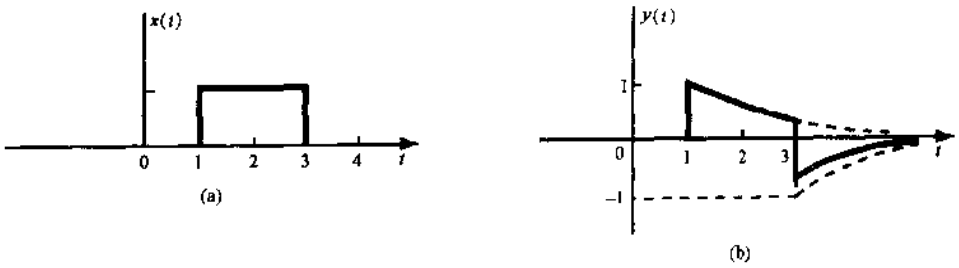


图 2-15

2.11 设一个连续时间 LTI 系统如下(见习题 1.56)

$$y(t) = T\{x(t)\} = \frac{1}{T}\int_{t-(T/2)}^{t+(T/2)} x(\tau)d\tau \tag{2.72}$$

(a)找出并画出系统的冲激响应$h(t)$。

(b)该系统是否是因果的?

[redacted] (a)式(2.72)可以改写为

$$y(t) = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{t+(T/2)} x(\tau)d\tau - \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{t-(T/2)} x(\tau)d\tau \tag{2.73}$$

利用式(2.61)和(2.9),式(2.73)可以表示为

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{T}x(t) * u\left(t+\frac{T}{2}\right) - \frac{1}{T}x(t) * u\left(t-\frac{T}{2}\right) \\ &= x(t) * \frac{1}{T}\left[u\left(t+\frac{T}{2}\right) - u\left(t-\frac{T}{2}\right)\right] = x(t) * h(t) \end{aligned} \tag{2.74}$$

因此,得

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{T}\left[u\left(t+\frac{T}{2}\right) - u\left(t-\frac{T}{2}\right)\right] \\ &= \begin{cases} 1/T & -T/2 < t \leqslant T/2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \end{aligned} \tag{2.75}$$

如图 2-16 所示。

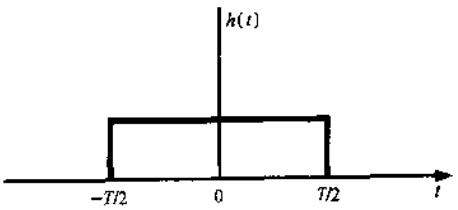


图 2-16

(b)由图 2-16 或式(2.75)可以看出,当 $t<0$ 时,$h(t)$

≠0。因此,系统不是因果的。

2.12 设 $y(t)$是一个有输入 $x(t)$的连续时间 LTI 系统的输出。试找出输入为 $x'(t)$时的系统输出,其中 $x'(t)$是 $x(t)$的一阶导数。

[redacted] 由式(2.10)

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

对上式卷积积分的两端求对 t 的微分,得

$$y'(t) = \frac{d}{dt}\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt}[h(\tau)x(t-\tau)d\tau]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x'(t-\tau)d\tau = h(t) * x'(t) \tag{2.76}$$

上式表明,$y'(t)$是输入为 $x'(t)$时的系统输出。

2.13 验证连续时间 LTI 系统的 BIBO 稳定条件[式(2.21)]。

[redacted] 假设一个连续时间 LTI 系统的输入 $x(t)$是有界的,即

$$|x(t)| \leqslant k_1 \qquad \text{对所有 } t \tag{2.77}$$

则利用式(2.10),有

$$|y(t)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau\right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)x(t-\tau)|d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)||x(t-\tau)|d\tau \leqslant k_1\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau$$

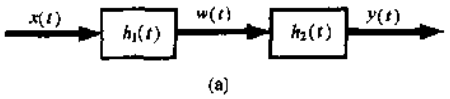
因为由式(2.77)得$|x(t-\tau)| \leqslant k_1$。因此,如果其冲激响应是绝对可积的,即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau = K < \infty$$

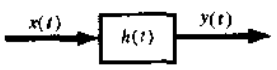
则$|y(t)| \leqslant k_1 K = k_2$,并且系统是 BIBO 稳定的。

2.14 如图 2-17(a)所示的系统是通过连接两个相叠的系统构成的,这两个系统的冲激响应分别是 $h_1(t)$和 $h_2(t)$,且

$$h_1(t) = e^{-2t}u(t) \qquad h_2(t) = 2e^{-t}u(t)$$



(a)



(b)

图 2-17

(a)找出如图 2-17(b)所示整个系统的冲激响应 $h(t)$。

(b)确定整个系统是 BIBO 稳定的。

[redacted] (a)设 $w(t)$是第一个系统的输出。根据式(2.6)

$$w(t) = x(t) * h_1(t) \tag{2.78}$$

则有

$$y(t) = w(t) * h_2(t) = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t) \tag{2.79}$$

根据卷积(2.8)的相关性,式(2.79)可以改写为

$$y(t) = x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = x(t) * h(t) \tag{2.80}$$

因此,整个系统的冲激响应为

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) \tag{2.81}$$

则对于给定的 $h_1(t)$和 $h_2(t)$,有

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau)h_2(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\tau}u(\tau)2e^{-(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau$$

$$= 2e^{-t}\int e^{-\tau}u(\tau)u(t-\tau)d\tau = 2e^{-t}\left[\int_0^t e^{-\tau}d\tau\right]u(t)$$

$$= 2(e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

(b)利用以上的 $h(t)$,有

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau = 2\int_0^{\infty} (e^{-\tau} - e^{-2\tau})d\tau = 2\left[\int_0^{\infty} e^{-\tau}d\tau - \int_0^{\infty} e^{-2\tau}d\tau\right]$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1 < \infty$$

因此，该系统是 BIBO 稳定的。

连续时间 LTI 系统的特征函数

2.15 设一个连续时间 LTI 系统的输入-输出关系如下：

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} x(\tau) d\tau \tag{2.82}$$

(a)找出该系统的冲激响应 $h(t)$。

(b)证明：该系统的特征函数是复指数函数 e^{st}。

(c)利用(a)得到的冲激响应，找出对应 e^{st} 的系统特征值。

(a)由式(2.82)、定义(2.1)和式(1.21)，得

$$h(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} \delta(\tau) d\tau = e^{-(t-\tau)} \Big|_{\tau=0} = e^{-t} \quad t > 0$$

因此

$$h(t) = e^{-t} u(t) \tag{2.83}$$

(b)设 $x(t) = e^{st}$，则

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} e^{s\tau} d\tau = e^{-t} \int_{-\infty}^{t} e^{(s+1)\tau} d\tau$$

$$= \frac{1}{s+1} e^{st} = \lambda e^{st} \qquad \text{如果 Res} > -1 \tag{2.84}$$

因此，由式(2.22)可知，e^{st} 是系统的特征函数，其相关的特征值是

$$\lambda = \frac{1}{s+1} \tag{2.85}$$

(c)利用式(2.24)和式(2.83)，与 e^{st} 相关的特征值为

$$\lambda = H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau} u(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-(s+1)\tau} d\tau = \frac{1}{s+1} \qquad \text{如果 Res} > -1$$

与式(2.85)相同。

2.16 设一个连续时间 LTI 系统为

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_{t-(T/2)}^{t+(T/2)} x(\tau) d\tau \tag{2.86}$$

(a)找出与特征函数 e^{st} 对应的系统的特征值。

(b)利用系统的冲激函数 $h(t)$，重复(a)。

(a)将 $x(\tau) = e^{s\tau}$ 代入式(2.86)，得

$$y(t) = \frac{1}{T_0} \int_{t-(T/2)}^{t+(T/2)} e^{s\tau} d\tau$$

$$= \frac{1}{sT} \left(e^{sT/2} - e^{-sT/2} \right) e^{st} = \lambda e^{st}$$

因此，与特征函数 e^{st} 对应的系统特征值为

$$\lambda = \frac{1}{sT} \left(e^{sT/2} - e^{-sT/2} \right) \tag{2.87}$$

(b)由习题 2.11 中的式(2.75)，有

$$h(t) = \frac{1}{T} \left[u\left(t + \frac{T}{2}\right) - u\left(t - \frac{T}{2}\right) \right] = \begin{cases} 1/T & -T/2 < t \leqslant T/2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

利用式(2.24)，与 e^{st} 对应的特征值 $H(s)$ 为

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-s\tau} d\tau = \frac{1}{sT} \left(e^{sT/2} - e^{-sT/2} \right)$$

与式(2.87)相同。

2.17 设一个稳定的连续时间 LTI 系统，其冲激响应 $h(t)$ 为实偶函数。证明该系统的特征值也是实函数，特征函数为 $\cos\omega t$ 以及 $\sin\omega t$。

设式(2.23)和(2.24)中的 $s = j\omega$，可以看出，$e^{j\omega t}$ 是连续时间 LTI 系统的特征函数，对应的特

征值为

$$\lambda = H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \tag{2.88}$$

因为系统是稳定的，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} | h(\tau) | d\tau < \infty$$

则

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| h(\tau)e^{-j\omega\tau} \right| d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} | h(\tau) | \cdot | e^{-j\omega\tau} | d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} | h(\tau) | d\tau < \infty$$

因为$| e^{-j\omega\tau} | = 1$。因此，对于任意的 ω 都有$H(j\omega)$。利用 Euler 公式，有

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)(\cos\omega\tau - j\sin\omega\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\cos\omega\tau d\tau - j\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\sin\omega\tau d\tau \end{aligned} \tag{2.89}$$

因为 $\cos\omega\tau$ 是 τ 的偶函数，$\sin\omega\tau$ 是 τ 的奇函数，如果 $h(t)$是实偶函数，则 $h(\tau)\cos\omega\tau$ 是偶函数，$h(\tau)\sin\omega\tau$是奇函数。因此，由式(1.75a)和(1.77)，式(2.89)变成

$$H(j\omega) = 2\int_0^{\infty} h(\tau)\cos\omega\tau d\tau \tag{2.90}$$

因为 $\cos\omega\tau$ 是ω 的偶函数，将式(2.90)中的 ω 变成 $-\omega$，将式(2.89)中的 j 变成 $-j$，得

$$\begin{aligned} H(-j\omega) = H(j\omega)^* &= 2\int_0^{\infty} h(\tau)\cos(-\omega\tau)d\tau \\ &= 2\int_0^{\infty} h(\tau)\cos(\omega\tau)d\tau = H(j\omega) \end{aligned} \tag{2.91}$$

因此可以看出，与特征函数 $e^{j\omega t}$ 对应的特征值$H(j\omega)$是实函数。

设系统用 **T** 表示，则由式(2.23)、(2.24)和(2.91)，得

$$\mathbf{T}\{e^{j\omega t}\} = H(j\omega)e^{j\omega t} \tag{2.92a}$$

$$\mathbf{T}\{e^{-j\omega t}\} = H(-j\omega)e^{-j\omega t} = H(j\omega)e^{-j\omega t} \tag{2.92b}$$

现在，由于 **T** 是线性的，因此

$$\mathbf{T}\{\cos\omega t\} = \mathbf{T}\left\{\frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})\right\} = \frac{1}{2}\mathbf{T}\{e^{j\omega t}\} + \frac{1}{2}\mathbf{T}\{e^{-j\omega t}\}$$

且

$$= H(j\omega)\left\{\frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})\right\} = H(j\omega)\cos\omega t \tag{2.93a}$$

$$\mathbf{T}\{\sin\omega t\} = \mathbf{T}\left\{\frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})\right\} = \frac{1}{2j}\mathbf{T}\{e^{j\omega t}\} - \frac{1}{2j}\mathbf{T}\{e^{-j\omega t}\}$$

$$= H(j\omega)\left\{\frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})\right\} = H(j\omega)\sin\omega t \tag{2.93b}$$

因此，由式(2.93a)和(2.93b)可以看出，$\cos\omega t$ 以及 $\sin\omega t$ 都是该系统的特征函数，其特征值均为式(2.88)或(2.90)给出的实特征值 $H(j\omega)$。

微分方程描述的系统

2.18 如图 2-18 所示的连续时间系统由一个积分器和一个比例乘法器构成。写出输入 $x(t)$ 与输出 $y(t)$之间的微分方程。

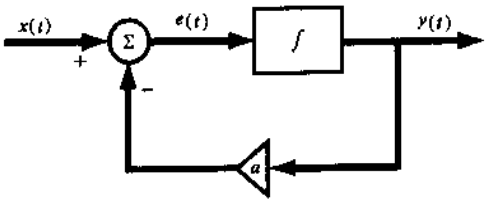


图 2-18

[redacted] 设图 2-18 所示积分器的输入用 $e(t)$ 表示，则积分器的输入-输出关系可以表示为

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e(\tau)d\tau \tag{2.94}$$

对式(2.94)两端求对 t 的微分，得

$$\frac{dy(t)}{dt} = e(t) \tag{2.95}$$

接着，图 2-18 中积分器的输入 $e(t)$可以表示为

$$e(t) = x(t) - ay(t) \tag{2.96}$$

将式(2.96)代入式(2.95)，得

$$\frac{dy(t)}{dt} = x(t) - ay(t)$$

或

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t) \tag{2.97}$$

这就是要求的一阶线性微分方程。

2.19 如图 2-19 所示的连续时间系统由两个积分器和两个比例乘法器构成。写出输入 $x(t)$ 与输出 $y(t)$之间的微分方程。

解 设 $e(t)$和 $\omega(t)$分别是图 2-19 中第一个积分器的输入和输出。利用式(2.95),第一个积分器的输入为

$$e(t) = \frac{d\omega(t)}{dt} = -a_1\omega(t) - a_2y(t) + x(t) \tag{2.98}$$

因为 $\omega(t)$是图 2-19 中第二个积分器的输入,则有

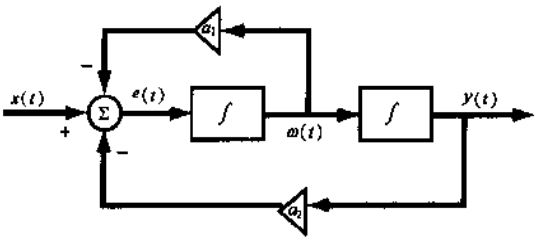


图 2-19

$$\omega(t) = \frac{dy(t)}{dt} \tag{2.99}$$

将式(2.96)代入式(2.95),得

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = -a_1\frac{dy(t)}{dt} - a_2y(t) + x(t)$$

或

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_2y(t) = x(t) \tag{2.100}$$

这就是要求的二阶线性微分方程。

注意,一般情况下,由相互连接的积分器和比例乘法器构成的连续时间 LTI 系统的阶数等于系统中积分器的个数。

2.20 设一个连续时间系统的输入 $x(t)$与输出 $y(t)$之间的关系如下:

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t) \tag{2.101}$$

其中,a 是常数。

(a)找出 $y(t)$。已知辅助条件 $y(0) = y_0$,且

$$x(t) = Ke^{-bt}u(t) \tag{2.102}$$

(b)用零输入和零状态响应方式表示 $y(t)$。

解 (a)设

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

其中,$y_p(t)$是满足式(2.101)的特解,$y_h(t)$是满足下式的一般解

$$\frac{dy_h(t)}{dt} + ay_h(t) = 0 \tag{2.103}$$

假设

$$y_p(t) = Ae^{-bt} \qquad t > 0 \tag{2.104}$$

将式(2.104)代入式(2.101),得

$$-bAe^{-bt} + aAe^{-bt} = Ke^{-bt}$$

由此可得 $A = K/(a-b)$,且

$$y_p(t) = \frac{K}{a-b}e^{-bt} \qquad t > 0 \tag{2.105}$$

要得到 $y_h(t)$,可以假设

$$y_h(t) = Be^{st}$$

代入式(2.103),得

$$sBe^{st} + aBe^{st} = (s + a)Be^{st} = 0$$

由此可得 $s = -a$，且

$$y_h(t) = Be^{-at}$$

将 $y_p(t)$和 $y_h(t)$组合起来，得

$$y(t) = Be^{-at} + \frac{K}{a - b}e^{-bt} \qquad t > 0 \tag{2.106}$$

由式(2.106)和辅助条件 $y(0) = y_0$，得

$$B = y_0 - \frac{K}{a - b}$$

因此，式(2.106)变成

$$y(t) = \left(y_0 - \frac{K}{a - b}\right)e^{-at} + \frac{K}{a - b}e^{-bt} \qquad t > 0 \tag{2.107}$$

如果 $t < 0$，有 $x(t) = 0$，且式(2.101)变成式(2.103)。因此

$$y(t) = Be^{-at} \qquad t < 0$$

由辅助条件 $y(0) = y_0$，得

$$y(t) = y_0 e^{-at} \qquad t < 0 \tag{2.108}$$

(b)将式(2.107)和(2.108)组合起来，$y(t)$可以用 $y_{zi}(t)$(零输入响应)和 $y_{zs}(t)$(零状态响应)的形式表示为

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 e^{-at} + \frac{K}{a - b}(e^{-bt} - e^{-at})u(t) \\ &= y_{zi}(t) + y_{zs}(t) \end{aligned} \tag{2.109}$$

其中

$$y_{zi}(t) = y_0 e^{-at} \tag{2.110a}$$

$$y_{zs}(t) = \frac{K}{a - b}(e^{-bt} - e^{-at})u(t) \tag{2.110b}$$

2.21 对于习题 2.20 中的系统

(a)证明：如果 $y(0) = y_0 \neq 0$，则系统是非线性的。

(b)证明：如果 $y(0) = 0$，则系统是线性的。

[redacted] (a)零输入产生零输出是线性系统的一个性质(见 1.5E 节)。但是，如果设式(2.102)中的 $K = 0$，则有 $x(t) = 0$，但由式(2.109)可以看出

$$y(t) = y_0 e^{-at} \neq 0 \qquad y_0 \neq 0$$

因此，如果 $y(0) = y_0 \neq 0$，则系统是非线性的。

(b)如果 $y(0) = 0$，设 $x_1(t)$和 $x_2(t)$是两个输入信号，$y_1(t)$和 $y_2(t)$是对应的输出，即

$$\frac{dy_1(t)}{dt} + ay_1(t) = x_1(t) \tag{2.111}$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt} + ay_2(t) = x_2(t) \tag{2.112}$$

辅助条件为

$$y_1(0) = y_2(0) = 0 \tag{2.113}$$

设

$$x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$$

其中，α_1 和 α_2 是任意的复数。将式(2.111)乘 α_1，式(2.112)乘 α_2，再相加，得

$$y(t) = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t)$$

满足微分方程

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t)$$

并且，由式(2.113)得

$$y(0) = \alpha_1 y_1(0) + \alpha_2 y_2(0) = 0$$

因此，$y(t)$是对应 $x(t)$的输出，且系统是线性的。

2.22 习题 2.20 中的系统。证明：初始静态条件 $y(0) = 0$ 也说明系统是时不变的。

[redacted] 设 $y_1(t)$是对输入 $x_1(t)$的响应,且

$$x_1(t) = 0 \qquad t \leqslant 0 \tag{2.114}$$

则

$$\frac{dy_1(t)}{dt} + ay_1(t) = x_1(t) \tag{2.115}$$

且

$$y_1(0) = 0 \tag{2.116}$$

现在,设 $y_2(t)$是对平移的输入 $x_2(t) = x_1(t-\tau)$的响应。由式(2.114)有

$$x_2(t) = 0 \qquad t \leqslant \tau \tag{2.117}$$

则 $y_2(t)$必须满足

$$\frac{dy_2(t)}{dt} + ay_2(t) = x_2(t) \tag{2.118}$$

且

$$y_2(\tau) = 0 \tag{2.119}$$

现在,由式(2.115)有

$$\frac{dy_1(t-\tau)}{dt} + ay_1(t-\tau) = x_1(t-\tau) = x_2(t)$$

如果设 $y_2(t) = y_1(t-\tau)$,则由式(2.116)有

$$y_2(\tau) = y_1(\tau - \tau) = y_1(0) = 0$$

因此,满足式(2.118)和式(2.119),系统是时不变的。

2.23 习题 2.20 中的系统。找出该系统的冲激响应 $h(t)$。

[redacted] 冲激响应 $h(t)$应该满足微分方程

$$\frac{dh(t)}{dt} + ah(t) = \delta(t) \tag{2.120}$$

则式(2.120)的一般解 $h_h(t)$

$$\frac{dh_h(t)}{dt} + ah_h(t) = 0 \tag{2.121}$$

要得到 $h_h(t)$,可以假设

$$h_h(t) = ce^{st}$$

将其代入式(2.121),得

$$sce^{st} + ace^{st} = (s+a)ce^{st} = 0$$

由此可得 $s = -a$,且

$$h_h(t) = ce^{-at}u(t) \tag{2.122}$$

可以预测,$h_h(t)$的特解 $h_p(t)$为0,因为 $h_p(t)$不包含 $\delta(t)$。否则,$h(t)$将是 $\delta(t)$的导数,而不是式(2.120)的右测。因此,

$$h(t) = ce^{-at}u(t) \tag{2.123}$$

要找出常数 c,将式(2.123)代入式(2.120),得

$$\frac{d}{dt}[ce^{-at}u(t)] + ace^{-at}u(t) = \delta(t)$$

利用式(1.25)和(1.30),上面的式子变成

$$ce^{-at}\frac{du(t)}{dt} = ce^{-at}\delta(t) = c\delta(t) = \delta(t)$$

因此,$c = 1$,则冲激响应为

$$h(t) = e^{-at}u(t) \tag{2.124}$$

2.24 习题 2.20 中的系统,其中 $y(0) = 0$。

(a)不利用冲激响应 $h(t)$,找出该系统的阶跃响应 $s(t)$。

(b)利用习题 2.23 中得到的冲激响应 $h(t)$,找出该系统的阶跃响应 $s(t)$。

(c)根据 $s(t)$找出冲激响应 $h(t)$。

[redacted] (a)在习题 2.20 中

$$x(t) = Ke^{-at}u(t)$$

设 $K=1, b=0$,得到 $x(t)=u(t)$,则 $y(t)=s(t)$。因此,设式(2.109)中的 $K=1, b=0$,且 $y(0)=y_0=0$,得到的阶跃响应

$$s(t) = \frac{1}{a}(1-e^{-at})u(t) \tag{2.125}$$

(b)利用习题 2.23 中的式(2.12)和式(2.124),得到的阶跃响应 $s(t)$为

$$s(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t} e^{-a\tau}u(t)d\tau$$

$$= \left[\int_0^t e^{-a\tau}d\tau\right]u(t) = \frac{1}{a}(1-e^{-at})u(t)$$

这与式(2.125)相同。

(c)利用式(2.13)和式(2.125),冲激响应 $h(t)$为

$$h(t) = s'(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{a}(1-e^{-at})u(t)\right]$$

$$= e^{-at}u(t) + \frac{1}{a}(1-e^{-at})u'(t)$$

利用式(1.25)和式(1.30),有

$$\frac{1}{a}(1-e^{-at})u'(t) = \frac{1}{a}(1-e^{-at})\delta(t) = \frac{1}{a}(1-1)\delta(t) = 0$$

因此

$$h(t) = e^{-at}u(t)$$

这与式(2.124)相同。

2.25 设系统为

$$y'(t) + 2y(t) = x(t) + x'(t) \tag{2.126}$$

找出系统的冲激响应 $h(t)$。

[redacted] 冲激响应 $h(t)$应该满足微分方程

$$h'(t) + 2h(t) = \delta(t) + \delta'(t) \tag{2.127}$$

则式(2.127)的完全解 $h_h(t)$为[见习题 2.23 和式(2.122)]

$$h_h(t) = c_1e^{-2t}u(t)$$

假设特解 $h_p(t)$为

$$h_p(t) = c_2\delta(t)$$

完全解是

$$h(t) = c_1e^{-2t}u(t) + c_2\delta(t) \tag{2.128}$$

$\delta(t)$函数必须是当前的,这样 $h'(t)$给式(2.127)的左侧提供了 $\delta'(t)$。将式(2.127)代入式(2.128),得

$$-2c_1e^{-2t}u(t) + c_1e^{-2t}u'(t) + c_2\delta'(t) + 2c_1e^{-2t}u(t) + 2c_2\delta(t) = \delta(t) + \delta'(t)$$

再次利用式(1.25)和(1.30),有

$$(c_1 + 2c_2)\delta(t) + c_2\delta'(t) = \delta(t) + \delta'(t)$$

使 $\delta(t)$和 $\delta'(t)$,得

$$c_1 + 2c_2 = 1 \qquad c_2 = 1$$

由此,有 $c_1=-1$ 和 $c_2=1$。将这些值代入式(2.128)中,得

$$h(t) = -e^{-2t}u(t) + \delta(t) \tag{2.129}$$

离散时间 LTI 系统的响应与卷积

2.26 验证式(2.36)和式(2.37),即

(a)$x[n] * h[n] = h[n] * x[n]$

(b)$\{x[n] * h_1[n]\} * h_2[n] = x[n] * \{h_1[n] * h_2[n]\}$

[redacted] (a)由定义式(2.35)

$$x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$$

改变变量 $n-k=m$,得

$$x[n]*h[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[n-m]h[m]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h[m]x[n-m]=h[n]*x[n]$$

(b)设 $x[n]*h_1[n]=f_1[n]$, $h_1[n]*h_2[n]=f_2[n]$,则

$$f_1[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h_1[n-k]$$

且

$$\{x[n]*h_1[n]\}*h_2[n]=f_1[n]*h_2[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}f_1[m]h_2[n-m]$$

$$=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\Big[\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h_1[m-k]\Big]h_2[n-m]$$

代入 $r=m-k$,交换求和的顺序,有

$$\{x[n]*h_1[n]\}*h_2[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[k]\Big(\sum_{r=-\infty}^{\infty}h_1[r]h_2[n-k-r]\Big)$$

现在,因为

$$f_2[n]=\sum_{r=-\infty}^{\infty}h_1[r]h_2[n-r]$$

得

$$f_2[n-k]=\sum_{r=-\infty}^{\infty}h_1[r]h_2[n-k-r]$$

因此

$$\{x[n]*h_1[n]\}*h_2[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]f_2[n-k]$$

$$=x[n]*f_2[n]=x[n]*\{h_1[n]*h_2[n]\}$$

2.27 证明 (a) $x[n]*\delta[n]=x[n]$ (2.130)

(b) $x[n]*\delta[n-n_0]=x[n-n_0]$ (2.131)

(c) $x[n]*u[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$ (2.132)

(d) $x[n]*u[n-n_0]=\sum_{k=-\infty}^{n-n_0}x[k]$ (2.133)

[redacted] (a)由式(2.35)和 $\delta[n-k]$的性质式(1.46),有

$$x[n]*\delta[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\delta[n-k]=x[n]$$

(b)同样,有

$$x[n]*\delta[n-n_0]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]\delta[n-k-n_0]=x[n-n_0]$$

(c)由式(2.35)和 $u[n-k]$的定义式(1.44),有

$$x[n]*u[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]u[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$$

(d)同样,有

$$x[n]*u[n-n_0]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]u[n-k-n_0]=\sum_{k=-\infty}^{n-n_0}x[k]$$

2.28 一个离散时间 LTI 系统的输入 $x[n]$和冲激响应 $h[n]$为

$$x[n]=u[n]\qquad h[n]=\alpha^n u[n],0<\alpha<1$$

(a)用式(2.35)计算输出 $y[n]$。

(b)用式(2.39)计算输出 $y[n]$。

[redacted] (a)由式(2.35)

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

$n<0$ 和 $n>0$ 时的函数 $x[k]$ 和冲激响 $h[n-k]$ 如图 2-20(a)所示。从图 2-20(a)可以看出，$n<0$ 时，$x[n]$ 和 $h[n-k]$ 不重叠，而当 $n\geqslant 0$ 时，$x[n]$ 和 $h[n-k]$ 在 $k=0$ 到 $k=n$ 之间重叠。因此，对 $n<0$，$y[n]=0$。对 $n\geqslant 0$，有

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k}$$

将求和变量 k 改变为 $m=n-k$，利用式(1.90)，有

$$y[n] = \sum_{m=n}^{0} \alpha^{m} = \sum_{m=0}^{n} \alpha^{m} = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

因此，可以将输出 $y[n]$ 写成

$$y[n] = \left(\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\right)u[n] \tag{2.134}$$

如图 2-20(b)所示。

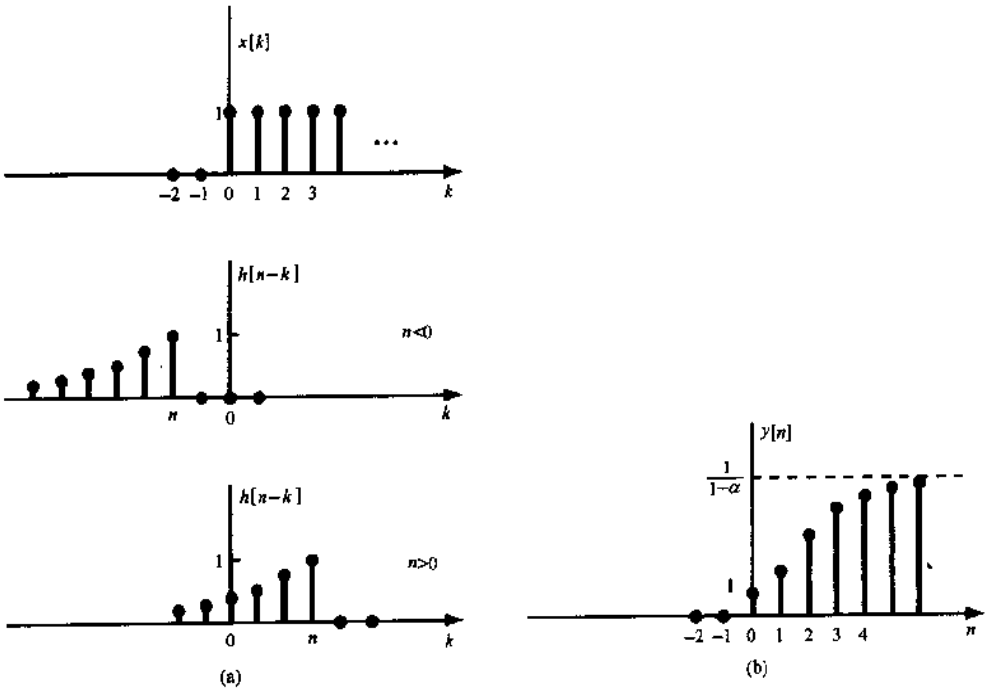


图 2-20

(b)由式(2.39)

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

$n<0$ 和 $n>0$ 时的 $h[k]$ 和 $x[n-k]$ 如图 2-21 所示。从图 2-21 可以看出，$n<0$ 时，$h[k]$ 和 $x[n-k]$ 不重叠，而当 $n\geqslant 0$ 时，$h[k]$ 和 $x[n-k]$ 在 $k=0$ 到 $k=n$ 之间重叠。因此，对 $n<0$，$y[n]=0$。对 $n\geqslant 0$，有

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^{k} = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

因此，得到式(2.134)中所示的同样结果。

2.29 计算 $y[n]=x[n]*h[n-k]$，其中

(a) $x[n]=\alpha^{n}u[n]$，$h[n]=\beta^{n}u[n]$

(b) $x[n]=\alpha^{n}u[n]$，$h[n]=\alpha^{-n}u[-n]$，$0<\alpha<1$

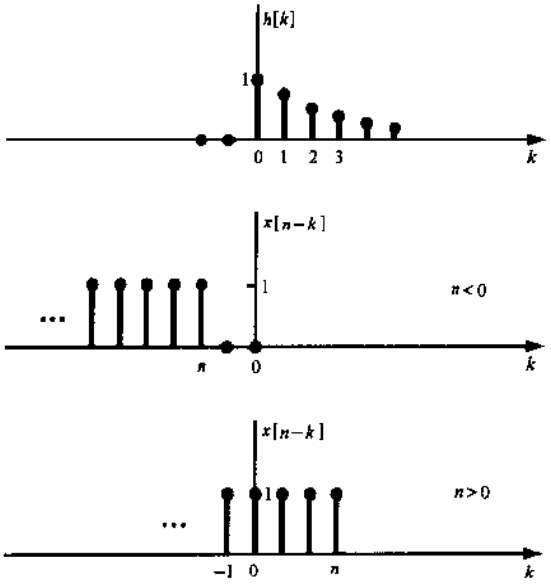


图 2-21

[redacted] (a)由式(2.35),有

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha^{k}u[k]\beta^{n-k}u[n-k]$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha^{k}\beta^{n-k}u[k]u[n-k]$$

因为

$$u[k]u[n-k]=\begin{cases}1 & 0\leqslant k\leqslant n\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

有

$$y[n]=\sum_{k=0}^{n}\alpha^{k}\beta^{n-k}=\beta^{n}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{k}\qquad n\geqslant 0$$

利用式(1.90)得

$$y[n]=\begin{cases}\beta^{n}\dfrac{1-(\alpha/\beta)^{n+1}}{1-(\alpha/\beta)}u[n] & \alpha\neq\beta\\ \beta^{n}(n+1)u[n] & \alpha=\beta\end{cases}\tag{2.135a}$$

或

$$y[n]=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta-\alpha}(\beta^{n+1}-\alpha^{n+1})u[n] & \alpha\neq\beta\\ \beta^{n}(n+1)u[n] & \alpha=\beta\end{cases}\tag{2.135b}$$

(b)

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha^{k}u[k]\alpha^{-(n-k)}u[-(n\quad k)]$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha^{-n}\alpha^{-2k}u[k]u[k-n]$$

当 $n\leqslant 0$ 时,有

$$u[k]u[k-n]=\begin{cases}1 & 0\leqslant k\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

因此,利用式(1.91),有

$$y[n]=\alpha^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^{2k}=\alpha^{-n}\sum(\alpha^{2})^{k}=\frac{\alpha^{-n}}{1-\alpha^{2}}\qquad n\leqslant 0\tag{2.136a}$$

当 $n\geqslant 0$ 时,有

$$u[k]u[k-n]=\begin{cases}1 & n\leqslant k\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

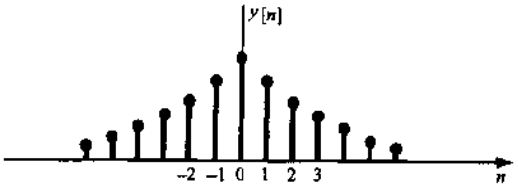


图 2-22

因此，利用式(1.92)，有

$$y[n] = \alpha^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^{2k} = \alpha^{-n}\frac{\alpha^{2n}}{1-\alpha^2} = \frac{\alpha^n}{1-\alpha^2} \quad n \geqslant 0 \tag{2.136b}$$

将式(2.136a)和式(2.136b)，得

$$y[n] = \frac{\alpha^{|n|}}{1-\alpha^2} \quad \text{对所有 } n \tag{2.137}$$

如图 2-22 所示。

2.30 计算 $y[n]=x[n]*h[n]$，其中 $x[n]$和 $h[n]$如图 2-23 所示。

(a)用分析技术。

(b)用图形方式。

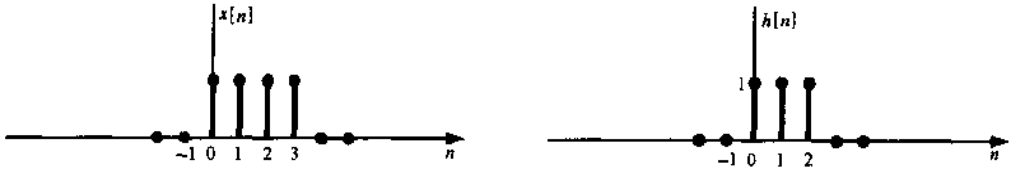


图 2-23

(a)注意 $x[n]$和 $h[n]$可以表示为

$$x[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3]$$
$$h[n] = \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]$$

现在，利用式(2.38)、式(2.130)和式(2.131)，有

$$\begin{aligned} x[n]*h[n] &= x[n]*\{\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]\} \\ &= x[n]*\delta[n] + x[n]*\delta[n-1] + x[n]*\delta[n-2] \\ &= x[n] + x[n-1] + x[n-2] \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} y[n] = {} & \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3] \\ & + \delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3] + \delta[n-4] \\ & + \delta[n-2] + \delta[n-3] + \delta[n-4] + \delta[n-5] \end{aligned}$$

或

$$y[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 3\delta[n-3] + 2\delta[n-4] + \delta[n-5]$$

或

$$y[n] = \{1,2,3,3,2,1\}$$

(b)不同 n 取值下的序列 $h[k]$、$x[k]$和 $h[n-k]$、$x[k]h[n-k]$如图 2-24 所示。

从图 2-24 可以看出，$n<0$ 和 $n>5$ 时的 $x[k]$和 $h[n-k]$不重叠，因此，对 $n<0$，$y[n]=0$。而当 $0\leqslant n\leqslant 5$ 时，$x[k]$和 $h[n-k]$重叠。因此，在 $0\leqslant n\leqslant 5$ 之间对 $x[k]h[n-k]$求和，得

$$y[0]=1 \quad y[1]=2 \quad y[2]=3 \quad y[3]=3 \quad y[4]=2 \quad y[5]=1$$

或

$$y[n] = \{1,2,3,3,2,1\}$$

如图 2-25 所示。

2.31 如果 $x_1[n]$和 $x_2[n]$为有公共周期 N 的周期信号，$x_1[n]$和 $x_2[n]$的卷积没有重叠。在此情况下，定义 $x_1[n]$和 $x_2[n]$的周期性卷积为

$$\begin{aligned} f[n] &= x_1[n] \otimes x_2[n] \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} x_1[k]x_2[n-k] \end{aligned} \tag{2.138}$$

证明 $f[n]$是周期信号，周期为 N。

因为 $x_2[n]$是周期为 N 的周期信号，有

$$x_2[(n-k)+N] = x_2[n-k]$$

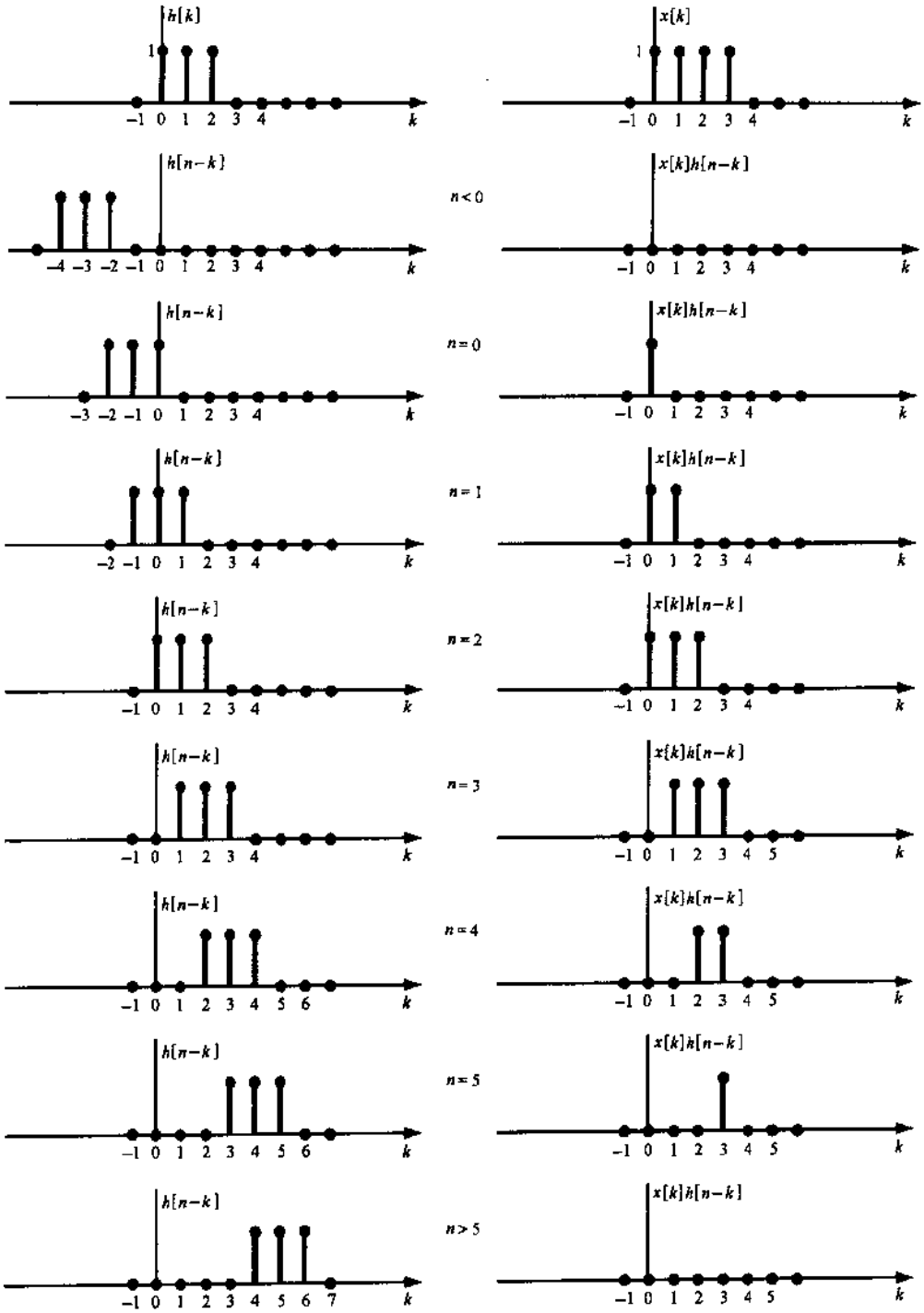


图 2-24

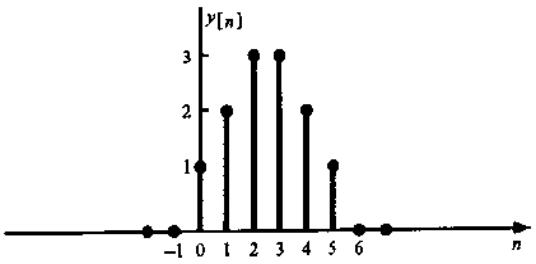


图 2-25

则由式(2.138)得

$$f[n+N]=\sum_{k=0}^{N-1}x_1[k]x_2[n+N-k]=\sum_{k=0}^{N-1}x_1[k]x_2[(n-k)+N]$$
$$=\sum_{k=0}^{N-1}x_1[k]x_2[(n-k)]=f[n]$$

因此，$f[n]$是周期信号周期为 N。

2.32 一个离散时间 LTI 系统的阶跃响应 $s[n]$为

$$s[n]=\alpha^n u[n]\qquad 0<\alpha<1$$

找出该系统的冲激响应 $h[n]$。

解 由式(2.41)，冲激响应 $h[n]$为

$$h[n]=s[n]-s[n-1]=\alpha^n u[n]-\alpha^{n-1}u[n-1]$$
$$=\{\delta[n]+\alpha^n u[n-1]\}-\alpha^{n-1}u[n-1]$$
$$=\delta[n]-(1-\alpha)\alpha^{n-1}u[n-1]$$

离散时间 LTI 系统的性质

2.33 证明：如果一个离散时间 LTI 系统的输入 $x[n]$是周期为 N 的周期信号，则输出 $y[n]$也是周期为 N 的周期信号。

解 设 $h[n]$为系统的冲激响应，则由式(2.39)，有

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]x[n-k]$$

设 $n=m+N$，则

$$y[m+N]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]x[m+N-k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]x[m-k+N]$$

因为 $x[n]$是周期为 N 的周期信号，则有

$$x[(m-k)+N]=x[m-k]$$

则

$$y[m+N]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]x[m-k]=y[m]$$

这表明输出 $y[n]$也是周期为 N 的周期信号。

2.34 一个连续时间 LTI 系统的冲激响应 $h[n]$如图 2-26(a)所示。不使用卷积技术，确定并画出如图 2-26(b)所示输入 $x[n]$下的系统输出 $y[n]$。

解 由图 2-26(b)，输入 $x[n]$可以表示为

$$x[n]=\delta[n-2]-\delta[n-4]$$

因为系统是线性时不变的，由冲激响应的定义可知，输出 $y[n]$为

$$y[n]=h[n-2]-h[n-4]$$

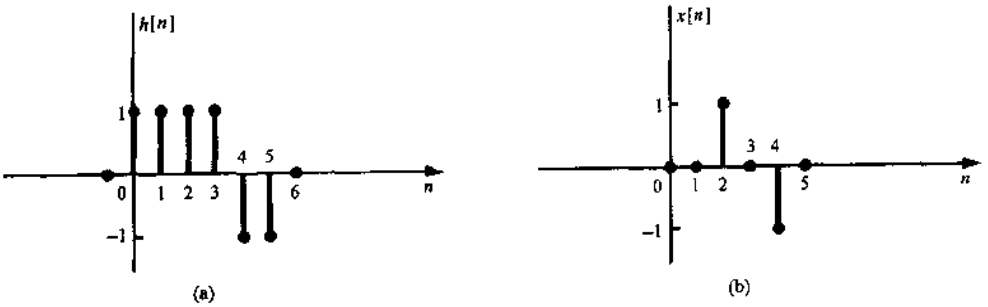


图 2-26

如图 2-27 所示。

2.35 一个离散时间系统，如果对于每一个 n_0，输出 $y[n]$在 $n=n_0$ 处的值只取决于 $n\leqslant n_0$ 时输入序列 $x[n]$的值(见 1.5D 节)，则该系统是因果系统。根据此定义可以导出离散时间 LTI 系统的因果条件(2.44)，即

$$h[n]=0\qquad n<0$$

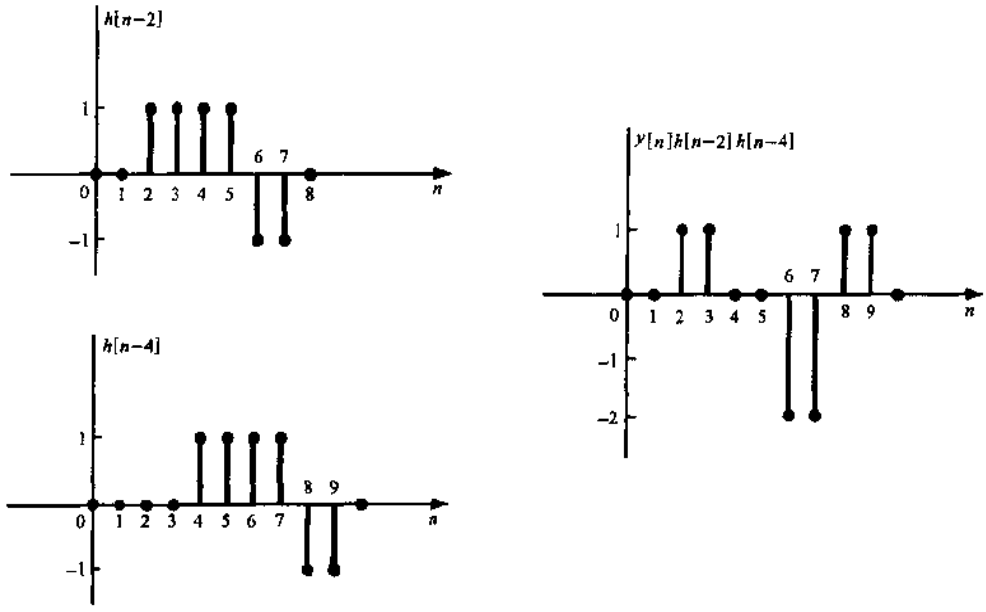


图 2-27

解 由式(2.44),有

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]x[n-k]$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{-1}h[k]x[n-k]+\sum_{k=0}^{\infty}h[k]x[n-k] \tag{2.139}$$

注意,第一个和式表示 $x[n]$未来值的加权和。因此,如果系统是因果的,则

$$\sum_{k=-\infty}^{-1}h[k]x[n-k]=0$$

上式成立的条件是

$$h[n]=0 \qquad n<0$$

现在,如果在 $n<0$ 时 $h[n]=0$,则式(2.139)变成

$$y[n]=\sum_{k=0}^{\infty}h[k]x[n-k]$$

这表明输出值只取决于过去和现在的输入值。

2.36 设一个离散时间 LTI 系统的输入 $x[n]$和输出 $y[n]$的关系为

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}2^{k-n}x[k+1]$$

该系统是否是因果的?

解 由定义式(2.30)和式(1.48),该系统的冲激响应 $h[n]$为

$$h[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}2^{k-n}\delta[k+1]=\sum_{k=-\infty}^{n}2^{-(n+1)}\delta[k+1]=2^{-(n+1)}\sum_{k=-\infty}^{n}\delta[k+1]$$

改变变量 $k+1=m$,由式(1.50),得

$$h[n]=2^{-(n+1)}\sum_{m=-\infty}^{n+1}\delta[m]=2^{-(n+1)}u[n+1] \tag{2.140}$$

由式(1.40),有 $h[-1]=u[0]\neq 0$。因此,系统不是因果系统。

2.37 验证离散时间 LTI 系统的 BIBO 稳定条件[式(2.49)]。

解 假设一个离散时间 LTI 系统的输入 $x[n]$是有界的,即

$$|x[n]|\leqslant k_1 \qquad \text{对所有 } n \tag{2.141}$$

则利用式(2.35),有

$$|y[n]|=\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty}h[k]x[n-k]\right|\leqslant\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h[k]||x[n-k]|\leqslant k_1\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h[k]|$$

由式(2.141)得$|x[n-k]|\leqslant k_1$。因此,如果其冲激响应是绝对可和的,即

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = K < \infty$$

则有

$$|y[n]| \leqslant k_1 K = k_2 < \infty$$

并且，系统是 BIBO 稳定的。

2.38 设一个离散时间 LTI 系统的冲激响应 $h[n]$ 为

$$h[n] = a^n u[n]$$

(a)该系统是否是因果系统？

(b)该系统是否是 BIBO 稳定的？

解 (a)因为在 $n<0$ 时 $h[n]=0$，则系统是因果的。

(b)利用式(2.91)(见习题 1.19)，有

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a^k u[n]| = \sum_{k=0}^{\infty} |a|^k = \frac{1}{1-|a|} \qquad |a|<1$$

因此，如果 $|a|<1$，该系统是 BIBO 稳定的。如果 $|a|\geqslant 1$，该系统是非稳定的。

差分方程描述的系统

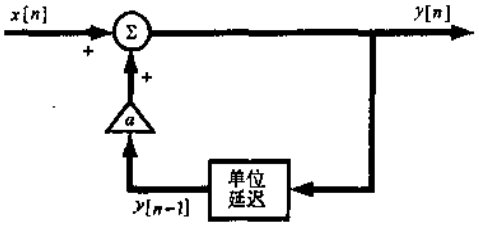


图 2-28

2.39 如图 2-28 所示的离散时间系统由一个单位延迟单元和一个比例乘法器构成。写出输入 $x[n]$ 与输出 $y[n]$ 之间的差分方程。

解 在图 2-28 中，单位延迟单元的输出为 $y[n-1]$。因此，由图 2-28 可以看出

$$y[n] = ay[n-1] + x[n] \tag{2.142}$$

或

$$y[n] - ay[n-1] = x[n] \tag{2.143}$$

这就是要求的一阶线性差分方程。

2.40 如图 2-29 所示的离散时间系统由两个单位延迟单元和两个比例乘法器构成。写出输入 $x[n]$ 与输出 $y[n]$ 之间的差分方程。

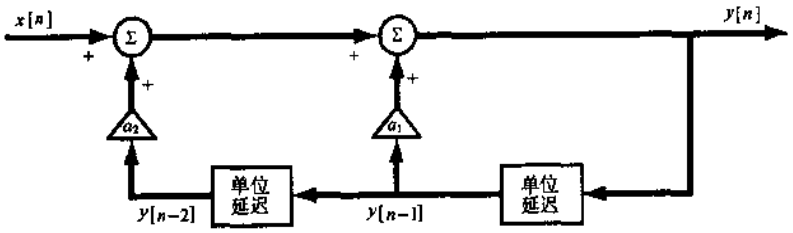


图 2-29

解 在图 2-29 中，第一个单位延迟单元(从右数)的输出为 $y[n-1]$，第二个单位延迟单元(从右数)的输出为 $y[n-2]$。因此，由图 2-29 可以看出

$$y[n] = a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + x[n] \tag{2.144}$$

或

$$y[n] - a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] = x[n] \tag{2.145}$$

这就是要求的二阶线性差分方程。

注意，一般情况下，由单位延迟单元和比例乘法器相互连接构成的离散时间 LTI 系统的阶次等于系统中的单位延迟单元数。

2.41 一个离散时间系统如图 2-30 所示，写出输入 $x[n]$ 与输出 $y[n]$ 之间的差分方程。

解 设单位延迟单元的输入为 $q[n]$，则由图 2-30 可以看出

$$q[n] = 2q[n-1] + x[n] \tag{2.146a}$$

$$y[n] = q[n] + 3q[n-1] \tag{2.146b}$$

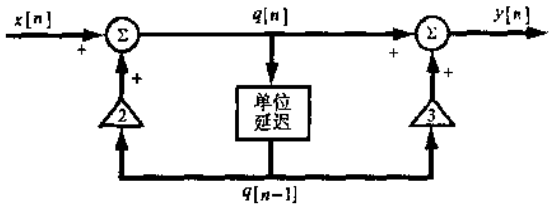


图 2-30

解式(2.146a)和式(2.146b),用 $x[n]$和 $y[n]$表示 $q[n]$和 $q[n-1]$,得

$$q[n] = \frac{2}{5}y[n] + \frac{3}{5}x[n] \tag{2.147a}$$

$$q[n-1] = \frac{1}{5}y[n] - \frac{1}{5}x[n] \tag{2.147b}$$

将式(2.147a)中的 n 改变为 $n-1$,得

$$q[n-1] = \frac{2}{5}y[n-1] + \frac{3}{5}x[n-1] \tag{2.147c}$$

因此,计算式(2.147b)和(2.147c),得

$$\frac{1}{5}y[n] - \frac{1}{5}x[n] = \frac{2}{5}y[n-1] + \frac{3}{5}x[n-1]$$

将上式两边乘以 5,重新排列各项,得

$$y[n] - 2y[n-1] = x[n] + 3x[n-1] \tag{2.148}$$

这就是要求的差分方程。

2.42 设一个离散时间系统的输入 $x[n]$与输出 $y[n]$之间的关系如下

$$y[n] - ay[n-1] = x[n] \tag{2.149}$$

其中,a 是常数。找出 $y[n]$的辅助条件 $y[-1]=y_{-1}$,且

$$x[n] = Kb^n u[n] \tag{2.150}$$

[redacted] 设

$$y[n] = y_p[n] + y_h[n]$$

其中,$y_p[n]$是满足式(2.149)的特解,$y_h[n]$是满足

$$y[n] - ay[n-1] = 0 \tag{2.151}$$

的完全解。

假设

$$y_p[n] = Ab^n \qquad n \geqslant 0 \tag{2.152}$$

将式(2.152)代入式(2.149),得

$$Ab^n - aAb^{n-1} = Kb^n$$

由此得 $A = Kb/(b-a)$,且

$$y_p[n] = \frac{K}{b-a}b^{n+1} \qquad n \geqslant 0 \tag{2.153}$$

为了得到 $y_h[n]$,假设

$$y_h[n] = Bz^n$$

将上式代入式(2.151),得

$$Bz^n - aBz^{n-1} = (z-a)Bz^{n-1} = 0$$

由此得 $z=a$,且

$$y_h[n] = Ba^n \tag{2.154}$$

将 $y_p[n]$和 $y_h[n]$组合起来,得

$$y[n] = Ba^n + \frac{K}{b-a}b^{n+1} \qquad n \geqslant 0 \tag{2.155}$$

为了确定式(2.155)中的 B,需要 $y[0]$的值。设式(2.149)和式(2.150)中的 $n=0$,得

$$y[0] - ay[-1] = y[0] - ay_{-1} = x[0] = K$$

或

$$y[0] = K + ay_{-1} \tag{2.156}$$

设式(2.155)中的 $n=0$,得

$$y[0] = B + K\frac{b}{b-a} \tag{2.157}$$

计算式(2.156)和式(2.157),得

$$K + ay_{-1} = B + K\frac{b}{b-a}$$

由此可得

$$B = ay_{-1} - K\frac{b}{b-a}$$

因此,式(2.155)变成

$$y[n] = y_{-1}a^{n+1} + K\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a} \quad n \geqslant 0 \tag{2.158}$$

对 $n<0$,有 $x[n]=0$,且式(2.149)变成式(2.151)。因此

$$y[n] = Ba^n \tag{2.159}$$

由辅助条件 $y[-1]=y_{-1}$,得

$$y[-1] = y_{-1} = Ba^{-1}$$

由此得 $B=y_{-1}a$。因此

$$y[n] = y_{-1}a^{n+1} \quad n < 0 \tag{2.160}$$

将式(2.158)和式(2.160)组合起来,$y[n]$可以表示为

$$y[n] = y_{-1}a^{n+1} + K\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a}u[n] \tag{2.161}$$

注意,与连续时间的情况(习题 2.21 和 2.22)一样,如果 $y[-1]\neq 0$,且式(2.149)描述的系统是非线性的。如果系统在初始时是静态的,即 $y[-1]=0$,则系统是因果和时不变的。还要注意,式(2.149)将在后面解出(见习题 2.43)。

2.43 习题 2.42 中的离散时间系统。找出 $y[n]=K\delta[n]$ 以及 $y[-1]=y_{-1}=\alpha$ 时的输出 $y[n]$。

解 式(2.149)可以得到 $n\geqslant 0$ 后 $y[n]$的值如下:

$$y[n] = ay[n-1] + x[n] \tag{2.162}$$

则

$$\begin{aligned}
y[0] &= ay[-1] + x[0] = a\alpha + K \\
y[1] &= ay[0] + x[1] = a(a\alpha + K) \\
y[2] &= ay[1] + x[2] = a^2(a\alpha + K) \\
&\vdots \\
y[n] &= ay[n-1] + x[n] = a^n(a\alpha + K) = a^{n+1}\alpha + a^nK
\end{aligned} \tag{2.163}$$

同样,当 $n<0$ 时

$$y[n-1] = \frac{1}{a}\{y[n] - x[n]\} \tag{2.164}$$

则

$$\begin{aligned}
y[-1] &= \alpha \\
y[-2] &= \frac{1}{a}\{y[-1] - x[-1]\} = \frac{1}{a}\alpha = a^{-1}\alpha \\
y[-3] &= \frac{1}{a}\{y[-2] - x[-2]\} = a^{-2}\alpha \\
&\vdots \\
y[-n] &= \frac{1}{a}\{y[-n+1] - x[-n+1]\} = a^{-n+1}\alpha
\end{aligned} \tag{2.165}$$

将式(2.163)和式(2.165)组合起来,得

$$y[n] = a^{n+1}\alpha + Ka^nu[n] \tag{2.166}$$

2.44 考虑习题 2.43 中的离散时间系统,该系统在静态时初始化。

(a)找出系统的冲激响应 $h[n]$。

(b)找出系统的阶跃响应 $s[n]$。

(c)由(b)的结果找出系统的冲激响应 $h[n]$。

[redacted] (a)设式(2.166)中的 $K=1$ 和 $y[-1]=a=0$,得

$$h[n] = a^n u[n] \tag{2.167}$$

(b)设式(2.161)中的 $K=1$、$b=1$ 和 $y[-1]=y_{-1}=0$,得

$$s[n] = \left(\frac{1-a^{n+1}}{1-a}\right)u[n] \tag{2.168}$$

(c)由式(2.41)和(2.168),冲激响应 $h[n]$为

$$h[n] = s[n] - s[n-1] = \left(\frac{1-a^{n+1}}{1-a}\right)u[n] - \left(\frac{1-a^n}{1-a}\right)u[n-1]$$

当 $n=0$ 时,

$$h[0] = \left(\frac{1-a}{1-a}\right)u[0] = 1$$

当 $n \geqslant 1$ 时,

$$h[n] = \frac{1}{1-a}[1-a^{n+1}-(1-a^n)] = \frac{a^n(1-a)}{1-a} = a^n$$

因此

$$h[n] = a^n u[n]$$

与式(2.167)相同。

2.45 找出满足下列差分方程的因果离散时间 LTI 系统的冲激响应 $h[n]$,指出每个系统是 FIR 系统或 IIR 系统。

(a)$y[n]=x[n]-2x[n-2]+x[n-3]$。

(b)$y[n]+2y[n-1]=x[n]+x[n-1]$。

(c)$y[n]-\frac{1}{2}y[n-2]=2x[n]-x[n-2]$。

[redacted] (a)由定义式(2.56)

$$h[n] = \delta[n] - 2\delta[n-2] + \delta[n-3]$$

或

$$h[n] = \{1, 0, -2, 1\}$$

因为 $h[n]$只有 4 项,则系统是 FIR 系统。

(b)$h[n] = -2h[n-1] + \delta[n] + \delta[n-1]$

因为系统是因果的,$h[-1]=0$,则

$$\begin{aligned}
h[0] &= -2h[-1] + \delta[0] + \delta[-1] = \delta[0] = 1\\
h[1] &= -2h[0] + \delta[1] + \delta[0] = -2 + 1 = -1\\
h[2] &= -2h[1] + \delta[2] + \delta[1] = -2(-1) = 2\\
h[3] &= -2h[2] + \delta[3] + \delta[2] = -2(2) = -2^2\\
&\vdots\\
h[n] &= -2h[n-1] + \delta[n] + \delta[n-1] = (-1)^n 2^{n-1}
\end{aligned}$$

因此

$$h[n] = \delta[n] + (-1)^n 2^{n-1} u[n-1]$$

因为 $h[n]$有限项,则系统是 IIR 系统。

(c)$h[n] = \frac{1}{2}h[n-2] + 2\delta[n] - \delta[n-2]$

因为系统是因果的,$h[-2]=h[-1]=0$,则

$$h[0] = -\frac{1}{2}h[-2] + 2\delta[0] - \delta[-2] = 2\delta[0] = 2$$

$$h[1] = -\frac{1}{2}h[-1] + 2\delta[1] - \delta[-1] = 0$$

$$h[2] = -\frac{1}{2}h[0] + 2\delta[2] - \delta[0] = \frac{1}{2}(2) - 1 = 0$$

$$h[3] = -\frac{1}{2}h[1] + 2\delta[3] - \delta[1] = 0$$

因此

$$h[n] = 2\delta[n]$$

因为 $h[n]$只有 1 项，则系统是 FIR 系统。

补 充 习 题

2.46 计算下列信号对的卷积 $y(t) = x(t) * h(t)$：

(a) $x(t) = \begin{cases} 1 & -a < t \leqslant a \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$ $h(t) = \begin{cases} 1 & -a < t \leqslant a \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

(b) $x(t) = \begin{cases} t & 0 < t \leqslant T \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$ $h(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t \leqslant 2T \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

(c) $x(t) = u(t-1)$ $h(t) = e^{-3t}u(t)$

答案 (a) $y(t) = \begin{cases} 2a - |t| & |t| < 2a \\ 0 & |t| \geqslant 2a \end{cases}$

(b) $y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{2}t^2 & 0 < t \leqslant T \\ \frac{1}{2}T^2 & T < t \leqslant 2T \\ -\frac{1}{2}t^2 + 2T - \frac{5}{2}T^2 & 2T < t \leqslant 3T \\ 0 & 3T < t \end{cases}$

(c) $\frac{1}{3}(1 - e^{-3(t-1)})u(t-1)$

2.47 计算下列序列对的卷积和 $y[n] = x[n] * h[n]$：

(a) $x[n] = u[n]$ $h[n] = 2^n u[-n]$

(b) $x[n] = u[n] - u[n-N]$ $h[n] = a^n u[n]$, $0 < a < 1$

(c) $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ $h[n] = \delta[n] - \frac{1}{2}\delta[n-1]$

答案 (a) $y[n] = \begin{cases} 2^{1+n} & n \leqslant 0 \\ 2 & n > 0 \end{cases}$

(b) $y(t) = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ \frac{1-a^{n+1}}{1-a} & 0 \leqslant n \leqslant N-1 \\ a^{n-N+1}\left(\frac{1-a^N}{1-a}\right) & N-1 < n \end{cases}$

(c) $y[n] = \delta[n]$

2.48 证明：如果 $y[n] = x[n] * h[n]$，则

$$y'(t) = x'(t) * h(t) = x(t) * h'(t)$$

提示 对式(2.6)和(2.10)求 t 的微分。

2.49 证明：如果 $y[n] = x[n] * h[n]$，则

$$x(t) * \delta'(t) = x'(t)$$

提示 使用习题 2.48 和式(2.58)。

2.50 设 $y[n] = x[n] * h[n]$，证明：

$$x[n - n_1] * h[n - n_2] = y[n - n_1 - n_2]$$

提示 见习题 2.3。

2.51 证明：对任意起始点 n_0，

$$x_1[n] \otimes h_2[n] = \sum_{k=n_0}^{n_0+N-1} x_1[k]x_2[n-k]$$

提示 见习题2.3。

2.52 一个连续时间LTI系统的阶跃响应 $s(t)$ 为

$$s(t) = [\cos\omega_0 t]u(t)$$

找出系统的冲激响应 $h(t)$。

答案 $h(t) = \delta(t) - \omega_0[\sin\omega_0 t]u(t)$

2.53 如图2-31所示的系统由两个并行的系统连接而成。这两个系统的冲激响应分别为

$$h_1(t) = e^{-2t}u(t) \qquad h_2(t) = 2e^{-t}u(t)$$

(a)找出整个系统的冲激响应 $h(t)$。

(b)整个系统是否是稳定的?

答案 (a) $h(t) = (e^{-2t} + 2e^{-t})u(t)$

(b) 是稳定的

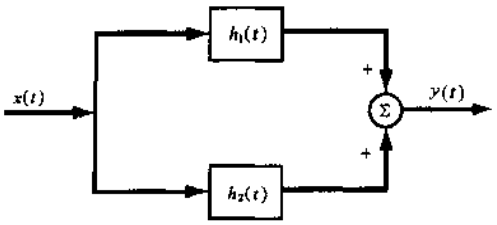


图2-31

2.54 设一个积分器的输入 $x(t)$ 和输出 $y(t)$ 的关系如下:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$$

(a)找出该积分器的冲激响应 $h(t)$。

(b)该积分器是否是稳定的?

答案 (a) $h(t) = u(t)$

(b)不是稳定的

2.55 设一个离散时间LTI系统的冲激响应 $h[n]$ 为

$$h[n] = \delta[n-1]$$

该系统是否是无记忆的。

答案 不,是记忆系统。

2.56 设一个离散时间LTI系统的冲激响应为

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

设 $y[n]$ 是系统的输出,而系统的输入为

$$x[n] = 2\delta[n] + \delta[n-3]$$

找出 $y[1]$ 和 $y[4]$。

答案 $y[1] = 1$ 和 $y[4] = \frac{5}{8}$

2.57 设一个离散时间LTI系统的冲激响应 $h[n]$ 为

$$h[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n-1]$$

(a)该系统是否是因果的?

(b)该系统是否是稳定的?

答案 (a)是因果的

(b)是稳定的

2.58 设一个 RLC 电路如图2-32所示。找出与输入电压 $x(t)$ 和输出电流 $y(t)$ 有关的差分方程。

答案 $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{LC}y(t) = \frac{1}{L}\frac{dx(t)}{dt}$

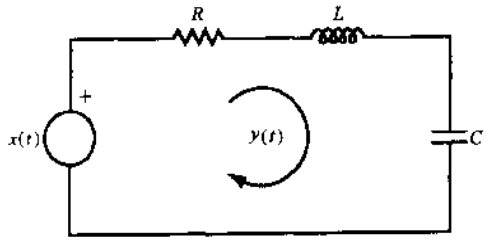


图2-32

2.59 考虑如图2-33所示的 RL 电路。

(a) 找出与输入电压 $x(t)$ 和 R 两端输出电压 $y(t)$ 有关的差分方程。

(b)找出电路的冲激响应 $h(t)$。

(c)找出电路的阶跃响应 $s(t)$。

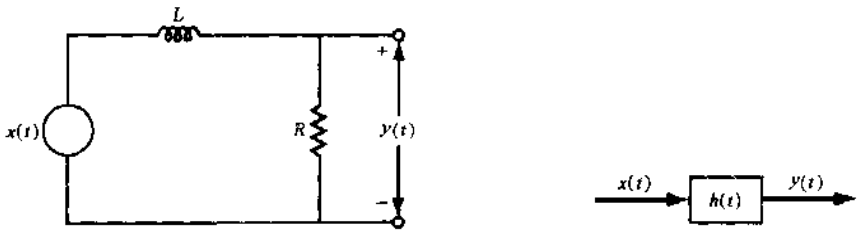


图 2-33

答案　(a) $\frac{dy(t)}{dt}+\frac{R}{L}y(t)=\frac{R}{L}x(t)$

(b) $h(t)=\frac{R}{L}e^{-(R/L)t}u(t)$

(c) $s(t)=\left[1-e^{-(R/L)t}\right]u(t)$

2.60　考虑习题 2.20 中的系统，如果 $x(t)=e^{-\alpha}u(t)$且 $y(0)=0$，找出输出 $y(t)$。

答案　$te^{-\alpha}u(t)$

2.61　用以下差分方程描述的系统是否是线性的？

$$\frac{dy(t)}{dt}+5y(t)+2=x(t)$$

答案　不，是非线性的。

2.62　写出如图 2-34 所示系统的输入-输出方程。

答案　$2y[n]-y[n-1]=4x[n]+2x[n-1]$

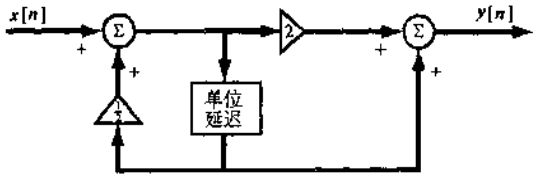


图 2-34

2.63　设一个离散时间 LTI 系统的冲激响应为

$$h[n]=\begin{cases}1 & n=0,1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

答案　$y[n]=x[n]+x[n-1]$

2.64　设一个离散时间 LTI 系统的输入 $x[n]$和输出 $y[n]$关系为

$$y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=x[n]$$

其中，$y[-1]=0$。找出对下列输入的输出 $y[n]$。

(a) $x[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$

(b) $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

答案　(a) $y[n]=6\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]u[n]$

(b) $y[n]=(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

2.65　考虑习题 2.42 中的系统。找出该系统的特征函数以及对应的特征值。

答案　z^n，$\lambda=\frac{z}{z-a}$

第3章 拉普拉斯变换与连续时间LTI系统

3.1 简介

从第2章可以得到这样的结论，LTI系统的响应可以用系统的输入与冲激响应的卷积来确定。本章和下一章将介绍信号和LTI系统的另一种表示方法。本章介绍在 s 域（s 是一个复变量）表示连续时间信号的拉普拉斯变换，还要介绍连续时间LTI系统的系统函数的概念。使用拉普拉斯变换，可以观察连续时间LTI系统的性质，研究LTI系统的很多问题。

3.2 拉普拉斯变换

在2.4节中可以看出，对一个有冲激响应 $h(t)$ 的连续时间LTI系统，在 e^{st} 型的复指数输入时系统输出为

$$y(t) = T\{e^{st}\} = H(s)e^{st} \tag{3.1}$$

其中

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}dt \tag{3.2}$$

A. 定义

式(3.2)中的函数 $H(s)$ 是指 $h(t)$ 的拉普拉斯变换。对一般的连续时间信号 $x(t)$ 而言，拉普拉斯变换 $X(s)$ 可以定义为

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt \tag{3.3}$$

变量 s 一般是复数值，且表示为

$$s = \sigma + j\omega \tag{3.4}$$

式(3.3)中定义的拉普拉斯变换常称为双边拉普拉斯变换。相反，单边拉普拉斯变换可以定义为

$$X_I(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}dt \tag{3.5}$$

其中，$0^- = \lim_{\varepsilon \to 0}(0 - \varepsilon)$。显然，只有在 $t<0$ 时有 $x(t)=0$，双边拉普拉斯变换和单边拉普拉斯变换才等效。单边拉普拉斯变换将在3.8节作介绍。除了在容易混淆的地方，一般将省略“双边”两字。

式(3.3)有时也可以看作是一个将信号 $x(t)$ 变为函数 $X(s)$ 的算子，用符号表示为

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} \tag{3.6}$$

并且称信号 $x(t)$ 及其拉普拉斯变换 $X(s)$ 形成了拉普拉斯变换对，表示为

$$x(t) \leftrightarrow X(s) \tag{3.7}$$

B. 收敛域

使拉普拉斯变换收敛的复变量 s 的值范围称为收敛域（ROC）。下面用几个例子来说明拉普拉斯变换及其有关的收敛域。

例3.1 考虑信号

$$x(t) = e^{-at}u(t) \qquad a \text{ 为实数} \tag{3.8}$$

则由式(3.3),$x(t)$的拉普拉斯变换为

$$X(s)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-at}u(t)e^{st}dt=\int_{0^+}^{\infty}e^{-(s+a)t}dt$$

$$=-\frac{1}{s+a}e^{-(s+a)t}\Big|_{0^+}^{\infty}=\frac{1}{s+a}\qquad \mathrm{Re}(s)>-a \tag{3.9}$$

因为只有在 $\mathrm{Re}(s+a)>0$ 或 $\mathrm{Re}(s)>-a$ 时,$\lim_{t\to\infty}e^{-(s+a)t}=0$。

因此,本例的收敛域在式(3.9)中指定为 $\mathrm{Re}(s)>-a$,显示在复平面内为 $\mathrm{Re}(s)=-a$ 线右侧的阴影区域,如图 3-1 所示。在拉普拉斯变换应用中,复平面一般称为 s 平面,其水平轴和垂直轴分别称为 σ 轴和 $j\omega$ 轴。

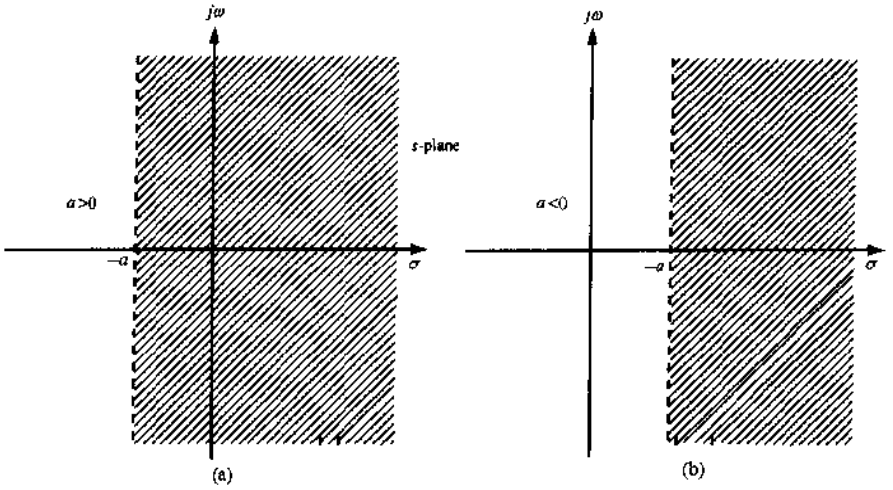


图 3-1　例 3.1 的收敛域

例 3.2　考虑信号

$$x(t)=-e^{-at}u(-t)\qquad a\text{ 为实数} \tag{3.10}$$

其拉普拉斯变换 $X(s)$为(见习题 3.1)

$$X(s)=\frac{1}{s+a}\qquad \mathrm{Re}(s)<-a \tag{3.11}$$

因此,本例的收敛域在式(3.11)中指定为 $\mathrm{Re}(s)<-a$,显示在复平面内为 $\mathrm{Re}(s)=-a$ 线左侧的阴影区域,如图 3-2 所示。比较式(3.9)和(3.11)可以看出,两个不同信号的 $X(s)$的代数表达式是相同的,只是其收敛域不同。因此,为了使每个信号 $x(t)$的拉普拉斯变换是惟一的,必须指定收敛域。

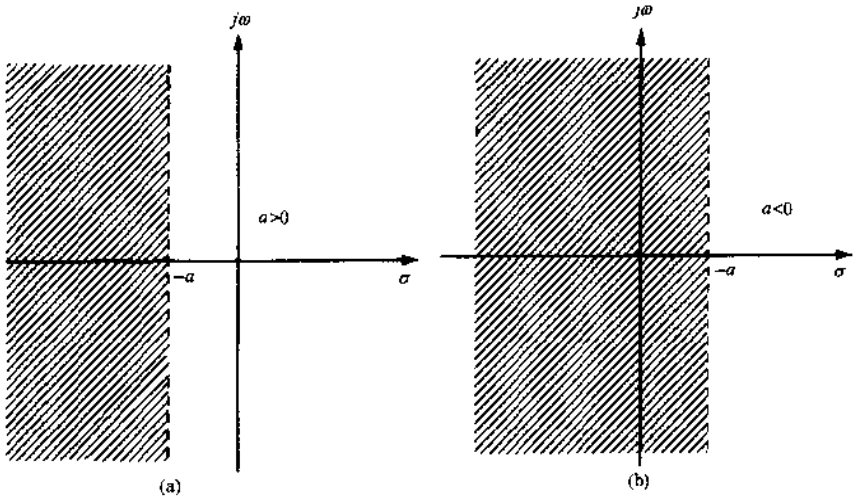


图 3-2　例 3.2 的收敛域

C. $X(s)$的极点和零点

一般地，$X(s)$是 s 的有理函数，即

$$X(s) = \frac{a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n} = \frac{a_0(s - z_1)\cdots(s - z_m)}{b_0(s - p_1)\cdots(s - p_n)} \tag{3.12}$$

系数 a_k 和 b_k 是实常数，m 和 n 是正整数。如果 $n > m$，$X(s)$称为真有理函数，如果 $n \leqslant m$，$X(s)$称为假有理函数。分子多项式的根 z_k 称为$X(s)$的零点，因为当 s 取这些值时，$X(s) = 0$。同样，分母多项式的根 p_k 称为$X(s)$的极点，因为当 s 取这些值时，$X(s)$无穷大。因此，$X(s)$的极点位于收敛域之外，因为根据定义，$X(s)$在极点不收敛；而 $X(s)$的零点可以在收敛域之内或外。除一个比例因子 a_0/b_0 外，$X(s)$完全可以由其零、极点确定。因此，$X(s)$在 s 平面内一种很简洁的表示方法就是除了显示收敛域外，还显示零、极点的位置。

一般用×表示每个极点的位置，用○表示零点的位置。由下式给出的 $X(s)$如图 3-3 所示。

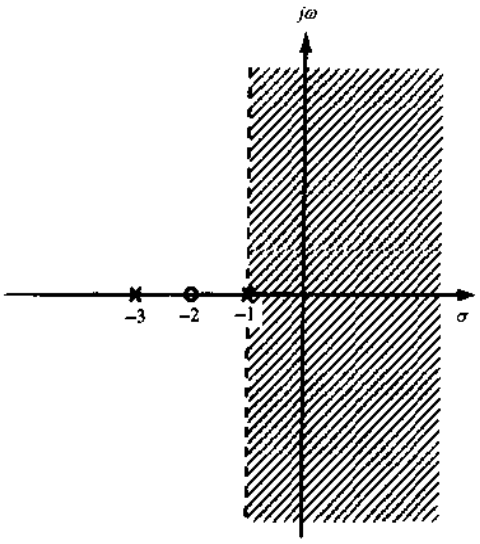


图 3-3　$X(s) = (2s + 4)/(s^2 + 4s + 3)$的 s 平面表示

$$X(s) = \frac{2s + 4}{s^2 + 4s + 3} = 2\frac{s + 2}{(s + 1)(s + 3)} \qquad \mathrm{Re}(s) > -1$$

注意，$X(s)$在 $s = -2$ 处有一个零点，在 $s = -1$ 和 $s = -3$ 处有两个极点，比例因子为2。

D. 收敛域的性质

性质 1　收敛域不包含任何极点。

性质 2　如果 $x(t)$是无限信号，即在无限区间 $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$（$-\infty < t_1$ 和 $t_2 > \infty$）之外，$x(t) = 0$，则收敛域是除 $s = 0$ 或 $s = \infty$外的整个平面。

性质 3　如果 $x(t)$是右半边信号，即在 $t < t_1 < \infty$内，$x(t) = 0$，则收敛域为

$$\mathrm{Re}(s) > \sigma_{\max}$$

其中，$\sigma_{\max}$等于 $X(s)$极点的最大实数部分。因此，收敛域是 s 平面中垂直线 $\mathrm{Re}(s) = \sigma_{\min}$的右半平面，且在 $X(s)$所有极点的右边。

性质 4　如果 $x(t)$是左半边信号，即在 $t > t_2 > -\infty$内，$x(t) = 0$，则收敛域为

$$\mathrm{Re}(s) < \sigma_{\min}$$

其中，$\sigma_{\min}$等于 $X(s)$极点的最小实数部分。因此，收敛域是 s 平面中垂直线 $\mathrm{Re}(s) = \sigma_{\min}$的左半平面，且在 $X(s)$所有极点的左边。

性质 5　如果 $x(t)$是双边信号，即 $x(t)$既不是右边信号，也不是左边信号，而是无限信

号,则收敛域为

$$\sigma_1 < \mathrm{Re}(s) < \sigma_2$$

其中,σ_1 和 σ_2 等于 $X(s)$两个极点的实数部分。因此,收敛域是 s 平面中垂直线 $\mathrm{Re}(s)=\sigma_1$ 和 $\mathrm{Re}(s)=\sigma_2$ 之间的一个垂直带。

注意,性质1直接来源于极点的定义,即 $X(s)$在极点是无穷大的。其他性质的证明见习题3.2~3.7。

3.3 常见信号的拉普拉斯变换

A. 单位冲激函数 $\delta(t)$

利用式(3.3)和(3.20),可得

$$\mathscr{L}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = 1 \qquad \text{对所有 } s \tag{3.13}$$

B. 单位阶跃函数 $u(t)$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[u(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-st}dt = \int_{0^+}^{\infty} e^{-st}dt \\ &= -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_{0^+}^{\infty} = \frac{1}{s} \qquad \mathrm{Re}(s) > 0\end{aligned} \tag{3.14}$$

其中,$0^+ = \lim_{\varepsilon \to 0}(0+\varepsilon)$。

C. 常见信号的拉普拉斯变换对

常见信号的拉普拉斯变换如表3.1所示。在此,我们不再计算给出信号的拉普拉斯变换,而只给出一个表,可以从中找到需要的变换。

表3.1　部分拉普拉斯变换对

$x(t)$	$X(s)$	收敛域
$\delta(t)$	1	所有 s
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathrm{Re}(s)>0$
$u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\mathrm{Re}(s)<0$
$tu(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\mathrm{Re}(s)>0$
$t^k u(t)$	$\frac{k!}{s^{k+1}}$	$\mathrm{Re}(s)>0$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\mathrm{Re}(s)>-\mathrm{Re}(a)$
$-e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\mathrm{Re}(s)<-\mathrm{Re}(a)$
$te^{-at}u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\mathrm{Re}(s)>-\mathrm{Re}(a)$
$-te^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\mathrm{Re}(s)<-\mathrm{Re}(a)$
$\cos\omega_0 tu(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\mathrm{Re}(s)>0$
$\sin\omega_0 tu(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\mathrm{Re}(s)>0$
$e^{-at}u(t)\cos\omega_0 tu(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$\mathrm{Re}(s)>-\mathrm{Re}(a)$
$e^{-at}u(t)\sin\omega_0 tu(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$\mathrm{Re}(s)>-\mathrm{Re}(a)$

3.4 拉普拉斯变换的性质

下面介绍拉普拉斯变换的基本性质。这些性质的证明见习题 3.8～3.16。

A. 线性

如果

$$x_1(t)\leftrightarrow X_1(s) \qquad \text{收敛域为 } R_1$$

则

$$x_2(t)\leftrightarrow X_2(s) \qquad \text{收敛域为 } R_2$$

$$a_1x_1(t)+a_2x_2(t)\leftrightarrow a_1X_1(s)+a_2X_2(s) \quad R'\supset R_1\cap R_2 \tag{3.15}$$

集合符号 $A\supset B$ 表示集合 A 包含集合 B，而 $A\cap B$ 表示集合 A 与集合 B 的交集，即包含同时属于集合 A 和集合 B 的所有元素。因此，式(3.15)表示拉普拉斯变换的收敛域至少与 R_1 和 R_2 之间的公共区域同样大。一般地，有 $R'=R_1\cap R_2$，如图 3-4 所示。

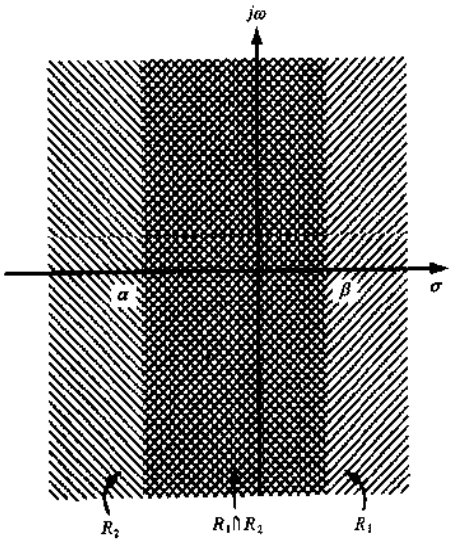


图 3-4 $a_1X_1(s)+a_2X_2(s)$的收敛域

B. 时间平移

如果

$$x(t)\leftrightarrow X(s) \qquad \text{收敛域为 } R$$

则

$$x(t-t_0)\leftrightarrow e^{-st_0}X(s) \qquad R'=R \tag{3.16}$$

式(3.16)表示时移之前和之后的收敛域相同。

C. s 域内平移

如果

$$x(t)\leftrightarrow X(s) \qquad \text{收敛域为 } R$$

则

$$e^{s_0t}x(t)\leftrightarrow X(s-s_0) \qquad R'=R+\mathrm{Re}(s_0) \tag{3.17}$$

式(3.17)表示与 $X(s-s_0)$相关的收敛域就是 $X(s)$的收敛域平移 $\mathrm{Re}(s_0)$，如图 3-5 所示。

D. 时间比例

如果

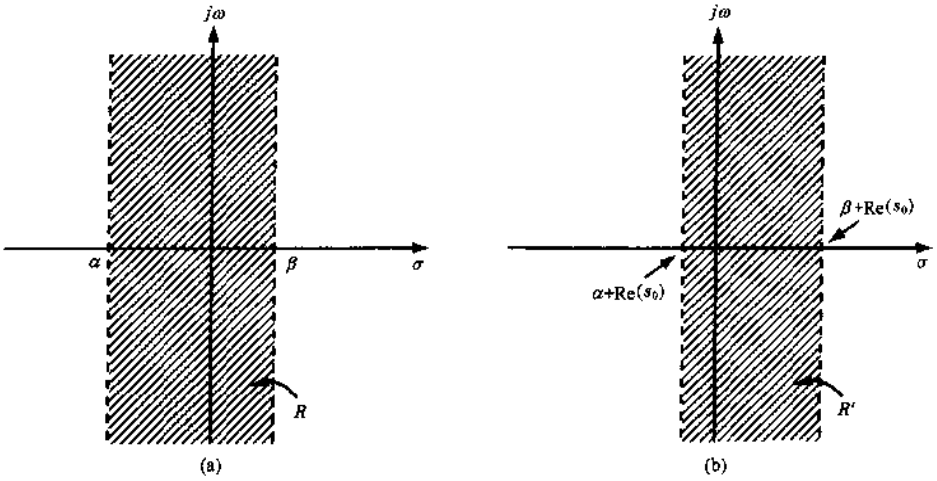


图 3-5　s 域内平移的效果　(a)$X(s)$的收敛域;(b)$X(s-s_0)$的收敛域

$$x(t)\leftrightarrow X(s)\qquad \text{收敛域为 } R$$

则

$$x(at)\leftrightarrow \frac{1}{|a|}X\left(\frac{s}{a}\right)\qquad R'=aR \tag{3.18}$$

式(3.18)表示时间变量 t 乘因子 a 的正比例会引起变量 s 乘 $1/a$ 的反比例,并且引起 $X(s/a)$ 乘 $1/|a|$ 的幅度比例。相应的收敛域效果如图 3-6 所示。

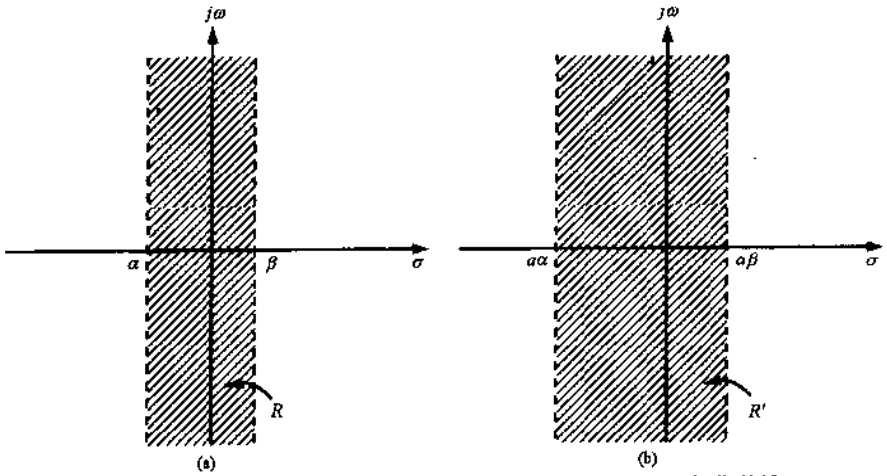


图 3-6　时间比例的效果　(a)$X(s)$的收敛域;(b)$X(s/a)$的收敛域

E. 时间翻转

如果

$$x(t)\leftrightarrow X(s)\qquad \text{收敛域为 } R$$

则

$$x(-t)\leftrightarrow X(-s)\qquad R'=-R \tag{3.19}$$

因此 $x(t)$的时间翻转将产生 s 平面内 σ-轴和 $j\omega$-轴的翻转。式(3.19)可以通过在式(3.18)设置 $a=-1$ 得到。

F. 时域微分

如果

$$x(t)\leftrightarrow X(s)\qquad \text{收敛域为 } R$$

则

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow sX(s) \qquad R' \supset R \tag{3.20}$$

式(3.20)表示时域内微分可以使相应的拉普拉斯变换乘以 s，有关的收敛域不变，但要取消在 $s=0$ 处的零、极点。

G. s 域微分

如果

$$x(t) \leftrightarrow X(s) \qquad \text{收敛域为 } R$$

则

$$-tx(t) \leftrightarrow \frac{dX(s)}{ds} \qquad R' = R \tag{3.21}$$

H. 时域积分

如果

$$x(t) \leftrightarrow X(s) \qquad \text{收敛域为 } R$$

则

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s}X(s) \qquad R' = R \cap \{\mathrm{Re}(s) > 0\} \tag{3.22}$$

式(3.22)表示与时域内积分对应的拉普拉斯变换为乘以 $1/s$，这是因为积分是微分的逆运算。由于乘以 $1/s$，则收敛域 R 可能引入额外的极点 $s=0$。

I. 卷积

如果

$$x_1(t) \leftrightarrow X_1(s) \qquad \text{收敛域为 } R_1$$
$$x_2(t) \leftrightarrow X_2(s) \qquad \text{收敛域为 } R_2$$

则

$$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(s)X_2(s) \qquad R' \supset R_1 \cap R_2 \tag{3.23}$$

此卷积性质在连续时间 LTI 系统分析和设计中极其重要。

表 3.2 归纳了本节介绍的拉普拉斯变换性质。

表 3.2　拉普拉斯变换的性质

性　质	信　号	变　换	收敛域
	$x(t)$	$X(s)$	R
	$x_1(t)$	$X_1(s)$	R_1
	$x_2(t)$	$X_2(s)$	R_2
线性	$a_1x_1(t)+a_2x_2(t)$	$a_1X_1(s)+a_2X_2(s)$	$R' \supset R_1 \cap R_2$
时间平移	$x(t-t_0)$	$e^{-st_0}X(s)$	$R'=R$
s 内平移	$e^{-s_0t}x(t)$	$X(s-s_0)$	$R'=R+\mathrm{Re}(s_0)$
时间比例	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X(s)$	$R'=aR$
时间翻转	$x(-t)$	$X(-s)$	$R'=-R$
时域微分	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s)$	$R' \supset R$
s 域微分	$-tx(t)$	$\frac{dX(s)}{ds}$	$R'=R$
积分	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{s}X(s)$	$R' \supset R \cap \{\mathrm{Re}(s)>0\}$
卷积	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(s)X_2(s)$	$R' \supset R_1 \cap R_2$

3.5 反拉普拉斯变换

从拉普拉斯变换 $X(s)$中找出信号 $x(t)$的拉普拉斯反变换称为反拉普拉斯变换，用符号表示为

$$x(t) = \mathscr{L}^{-1}[X(s)] \tag{3.24}$$

A. 反变换公式

下面的式子可以用于各类变换函数，包括复 s 平面内的线积分运算，即

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s)e^{st}ds \tag{3.25}$$

在此积分中，实数 c 的选择要满足：如果 $X(s)$的收敛域为 $\sigma_1 < \mathrm{Re}(s) < \sigma_2$，则 $\sigma_1 < c < \sigma_2$。反拉普拉斯变换的积分计算需要理解复变量原理。

B. 利用拉普拉斯变换对表

在 $X(s)$反变换的第二个方法中，将 $X(s)$表示为和的形式，即

$$X(s) = X_1(s) + \cdots + X_n(s) \tag{3.26}$$

其中，$X_1(s), \cdots, X_n(s)$是一些已知其反变换为 $x_1(t), \cdots, x_n(t)$的函数。根据线性性质式(3.15)，可得

$$x(t) = x_1(t) + \cdots + x_n(t) \tag{3.27}$$

C. 部分分式展开

如果 $X(s)$是有理函数，表示形式为

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = k\frac{(s-z_1)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)\cdots(s-p_n)} \tag{3.28}$$

则可以使用部分分式展开法来计算 $X(s)$的反变换。

(a)当 $X(s)$是真有理函数时，即当 $m < n$ 时：

1. 无重极点情况

如果 $X(s)$的所有极点(即 $D(s)$的所有零点)都是不同的，则 $X(s)$可以写为

$$X(s) = \frac{c_1}{(s-p_1)} + \cdots + \frac{c_n}{(s-p_n)} \tag{3.29}$$

其中系数 c_k 为

$$c_k = (s-p_k)X(s)\big|_{s=p_k} \tag{3.30}$$

2. 重极点情况

如果 $D(s)$有重根，即包含 $(s-p_i)^r$ 形式的因子，则可以说 p_i 是 $X(s)$的重极点，重复率为 r。因此，$X(s)$的表达式可以由下列形式的项构成

$$X(s) = \frac{\lambda_1}{s-p_i} + \frac{\lambda_2}{(s-p_i)^2} + \cdots + \frac{\lambda_r}{(s-p_i)^r} \tag{3.31}$$

其中

$$\lambda_{r-k} = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{ds^k}[(s-p_i)^r X(s)]\big|_{s=p_i} \tag{3.32}$$

(b)当 $X(s)$是假有理函数时，即当 $m \geqslant n$ 时：

如果 $m \geqslant n$ 时，通过长除，可以将 $X(s)$写为

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = Q(s) + \frac{R(s)}{D(s)} \tag{3.33}$$

其中 $N(s)$和 $D(s)$分别是 $X(s)$的分子、分母多项式，$Q(s)$是 $m-n$ 阶的多项式，余数 $R(s)$是

阶次小于 n 阶的多项式，则 $X(s)$的反拉普拉斯变换可以通过确定 $Q(s)$的反拉普拉斯变换以及 $R(s)/D(s)$的反拉普拉斯变换得到。由于 $R(s)/D(s)$是真有理数，$R(s)/D(s)$的反拉普拉斯变换用前面介绍的部分分式展开法计算。$Q(s)$可以使用以下的变换对计算：

$$\frac{d^k\delta(t)}{dt^k} \leftrightarrow s^k \qquad k = 1,2,3,\cdots \tag{3.34}$$

3.6　系统函数

A. *系统函数*

在 2.2 节曾介绍过，连续时间 LTI 系统的输出 $y(t)$等于输入 $x(t)$与冲激响应 $h(t)$的卷积，即

$$y(t) = x(t) * h(t) \tag{3.35}$$

利用卷积性质(3.23)，得

$$Y(s) = X(s)H(s) \tag{3.36}$$

其中，$Y(s)$、$X(s)$和 $H(s)$分别是 $y(t)$、$x(t)$和 $h(t)$的拉普拉斯变换。式(3.36)可以表示为

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \tag{3.37}$$

$h(t)$的拉普拉斯变换 $H(s)$就是系统的系统函数(或传递函数)。根据式(3.37)，系统函数 $H(s)$也可以定义为输出 $y(t)$和输入 $x(t)$的拉普拉斯变换之比。系统函数 $H(s)$完全可以描述系统的特征，因为冲激响应 $h(t)$完全可以描述系统的特征。图 3-7 显示了式(3.35)与式(3.36)之间的关系。

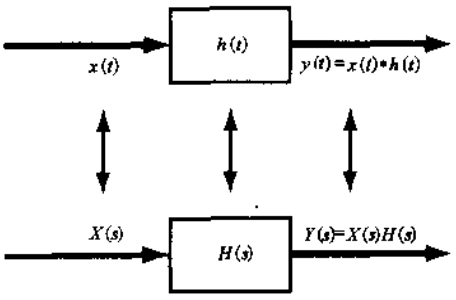


图 3-7　冲激响应域系统函数

B. *LTI 系统的特征*

连续时间 LTI 系统的很多性质都与 s 平面内的 $H(s)$密切相关，尤其是极点位置和收敛域。

1. 因果性

对一个连续时间 LTI 系统而言，有

$$h(t) = 0 \qquad t < 0$$

因为 $h(t)$是一个右边信号，相应对 $H(s)$的要求就是 $H(s)$的收敛域为

$$\mathrm{Re}(s) > \sigma_{\max}$$

也就是说，$H(s)$的收敛域为 s 平面中所有根点右侧的区域。同样道理，如果系统是逆因果的，则

$$h(t) = 0 \qquad t > 0$$

且 $h(t)$是左边信号。因此，$H(s)$的收敛域为

$$\mathrm{Re}(s) < \sigma_{\min}$$

也就是说，$H(s)$的收敛域为 s 平面中所有极点左侧的区域。

2. 稳定性

在 2.3 节曾介绍，当且仅当[式(2.21)]

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < \infty$$

时，连续时间 LTI 系统是 BIBO 稳定的。相应对 $H(s)$的要求为，$H(s)$的收敛域包含 $j\omega$-轴(即 $s = j\omega$)(见习题 3.36)。

C. 用线性常系数微分方程描述的 LTI 系统的系统函数

在 2.5 节曾考虑了输入 $x(t)$和输出 $y(t)$满足如下一般线性常系数微分方程的连续时间 LTI 系统：

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \tag{3.38}$$

进行拉普拉斯变换，并利用拉普拉斯变换的微分性质(3.20)，得

$$\sum_{k=0}^{N} a_k s^k Y(s) = \sum_{k=0}^{M} b_k s^k X(s)$$

或

$$Y(s)\sum_{k=0}^{N} a_k s^k = X(s)\sum_{k=0}^{M} b_k s^k \tag{3.39}$$

则

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k} \tag{3.40}$$

因此，$H(s)$总是有理的。注意，$H(s)$的收敛域没有用式(3.40)指定，但必须由系统的其他要求推出，如因果性或稳定性。

D. 系统级联

对于两个级联的系统[分别有 $h_1(t)$和 $h_2(t)$，如图 3.8(a)所示]，其冲激响应 $h(t)$为[式(2.81)，见习题 2.14]

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t)$$

因此，相应的系统函数为乘积关系

$$H(s) = H_1(s)H_2(s) \tag{3.41}$$

如图 3-8(b)所示。

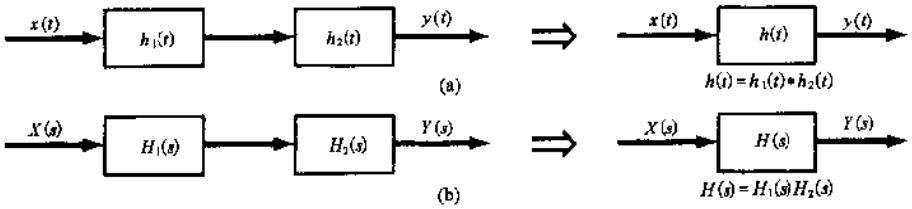


图 3-8　级联的两个系统　(a)时域表示；(b)s 域表示

同样道理，两个 LTI 系统的并行组合[图 3-9(a)]的冲激响应为(习题 2.53)

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t)$$

则

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s) \tag{3.42}$$

如图 3-9(b)所示。

3.7　单边拉普拉斯变换

A. 定义

信号 $x(t)$的单边拉普拉斯变换 $X_I(t)$可以定义为[式(3.5)]

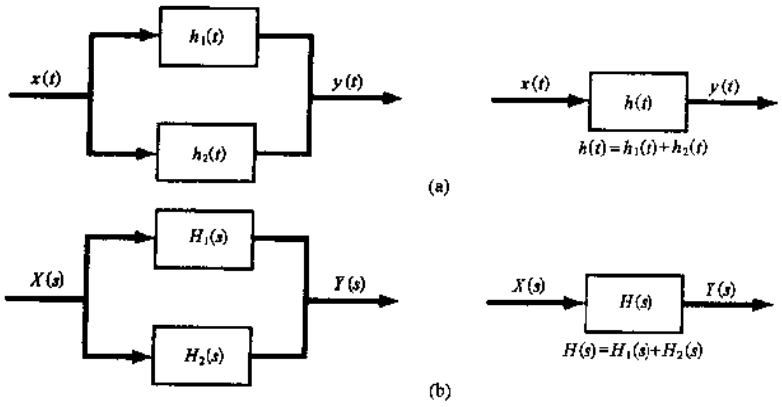


图 3-9 并联的两个系统 (a)时域表示;(b)s 域表示

$$X_I(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}dt \tag{3.43}$$

积分的下限选为 0^-(不是 0 或 0^+)是为了允许 $x(t)$包含 $\delta(t)$及其导数。可以看出,除了在 0 点的冲激函数或其导数,从 0^- 到 0^+ 的积分为 0。单边拉普拉斯变换忽略了 $t<0$ 时的 $x(t)$。因为式(3.43)中的 $x(t)$是右边信号,$X_I(t)$收敛域总是为 $\mathrm{Re}(s)>\sigma_{max}$,即 s 平面的右半平面。

B. 基本性质

单边拉普拉斯变换的大多数性质与双边拉普拉斯变换相同。如果一个用线性常系数微分方程描述的因果系统有非零初始条件,则常用单边拉普拉斯变换来计算系统对因果输入的响应。单边拉普拉斯变换的时间微分和时间积分性质不同于双边拉普拉斯变换,将在下面介绍。

1.时域微分

假如 $\lim_{t\to\infty} x(t)e^{-st}=0$,则

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow sX_I(s) - x(0^-) \tag{3.44}$$

重复使用该性质,得

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \leftrightarrow s^2X_I(s) - sx(0^-) - x'(0^-) \tag{3.45}$$

$$\frac{d^nx(t)}{dt^n} \leftrightarrow s^nX_I(s) - s^{n-1}x(0^-) - s^{n-2}x'(0^-) - \cdots - x^{(n-1)}(0^-) \tag{3.46}$$

其中

$$x^{(r)}(0^-) = \left.\frac{d^rx(t)}{dt^r}\right|_{t=0^-}$$

2.时域积分

$$\int_{0^-}^{t} x(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s}X_I(s) \tag{3.47}$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s}X_I(s) + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-} x(\tau)d\tau \tag{3.48}$$

C. 系统函数

注意,对于单边拉普拉斯变换,系统函数 $H(s)=Y(s)/X(s)$是在一定条件下定义的,这个条件就是 LTI 系统是松弛的,即所有的初始条件为 0。

D. 变换电路

如果电子电路的工作和信号可以用其等效的拉普拉斯变换来表示,不使用微分方程也可

以得到电路的解。这里的拉普拉斯变换指单边拉普拉斯变换，用下标 I 表示，即为 $X_I(s)$。这些通过拉普拉斯变换等效式得到的电路称为变换。为了利用这种技术，需要知道各电路单元的拉普拉斯模型，如图 3-10 所示。这些模型将在下面讨论。拉普拉斯变换模型在电子电路中的应用实例见习题 3.40～3.42。

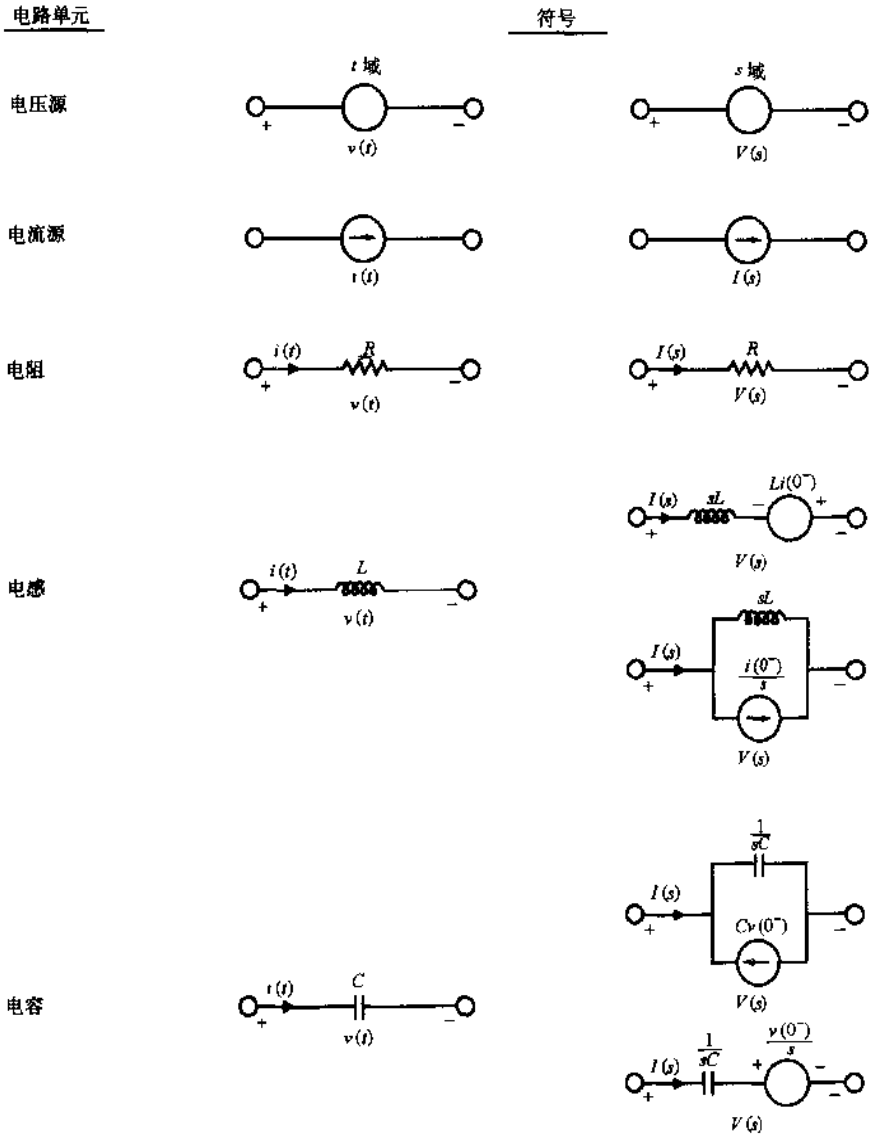


图 3-10　拉普拉斯变换电路单元模型表示

1. 信号源

$$v(t)\leftrightarrow V(s) \qquad i(t)\leftrightarrow I(s)$$

其中，$v(t)$和 $i(t)$分别是电压源信号和电流源信号。

2. 电阻 R

$$v(t) = Ri(t)\leftrightarrow V(s) = RI(s) \tag{3.49}$$

3. 电感 L

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt}\leftrightarrow V(s) = sLI(s) - Li(0^-) \tag{3.50}$$

图 3-10 中电感的第二个模型可以通过改写式(3.50)得到，为

$$i(t)\leftrightarrow I(s) = \frac{1}{sL}V(s) + \frac{1}{s}i(0^-) \tag{3.51}$$

4. 电容 C

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \leftrightarrow I(s) = sCV(s) - Cv(0^-) \tag{3.52}$$

图 3-10 中电容的第二个模型可以通过改写式(3.52)得到，为

$$v(t) \leftrightarrow V(s) = \frac{1}{sC}I(s) + \frac{1}{s}v(0^-) \tag{3.53}$$

习 题 解 答

拉普拉斯变换

3.1 找出拉普拉斯变换

(a) $x(t) = -e^{-at}u(-t)$

(b) $x(t) = e^{at}u(-t)$

[redacted] (a)由式(3.3)

$$X(s) = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(-t)e^{-st}dt = -\int_{-\infty}^{0^-} e^{-(s+a)t}dt$$

$$= \frac{1}{s+a}e^{-(s+a)t}\Big|_{-\infty}^{0^-} = \frac{1}{s+a} \qquad \mathrm{Re}(s) < -a$$

因此，得

$$-e^{-at}u(-t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a} \qquad \mathrm{Re}(s) < -a \tag{3.54}$$

(b)同样道理

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{at}u(-t)e^{-at}dt = \int_{-\infty}^{0^-} e^{(s-a)t}dt$$

$$= -\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)t}\Big|_{-\infty}^{0^-} = -\frac{1}{s-a} \qquad \mathrm{Re}(s) < a$$

因此，得

$$e^{at}u(-t) \leftrightarrow -\frac{1}{s-a} \qquad \mathrm{Re}(s) < -a \tag{3.55}$$

3.2 一个有界信号定义为

$$x(t)\begin{cases} \neq 0 & t_1 \leqslant t \leqslant t_2 \\ = 0 & \text{其他} \end{cases}$$

其中，t_1 和 t_2 为有界值。证明：如果 $X(s)$ 至少在一个 s 值处收敛，则 $X(s)$ 的收敛域为整个 s 平面。

[redacted] 设 $X(s)$ 在 $s=\sigma_0$ 处收敛，则由式(3.3)

$$|X(s)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-st}|\,dt = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|\,e^{-\sigma_0 t}dt < \infty$$

设 $\mathrm{Re}(s) = \sigma_1 > \sigma_0$，则

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|x(t)e^{-(\sigma_1+j\omega)t}\right|dt = \left|\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|\,e^{-\sigma_1 t}dt\right|$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|\,e^{-\sigma_0 t}e^{-(\sigma_1-\sigma_0)t}dt$$

因为 $(\sigma_1 - \sigma_0) > 0$，$e^{-(\sigma_1-\sigma_0)t}$ 是一个衰减指数，则在 $x(t) \neq 0$ 的区间内。该指数的最大值为 $e^{-(\sigma_1-\sigma_0)t_1}$，且

$$\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|\,e^{-\sigma_1 t}dt < e^{-(\sigma_1-\sigma_0)t_1}\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|\,e^{-\sigma_0 t}dt < \infty \tag{3.56}$$

因此，对 $\mathrm{Re}(s)=\sigma_1>\sigma_0$，$X(s)$收敛。同样，如果 $\sigma_1<\sigma_0$，则

$$\int_{t_1}^{t_2}|x(t)|e^{-\sigma_1 t}dt<e^{-(\sigma_1-\sigma_0)t_2}\int_{t_1}^{t_2}|x(t)|e^{-\sigma_0 t}dt<\infty \tag{3.57}$$

对 $\mathrm{Re}(s)=\sigma_1<\sigma_0$，$X(s)$也收敛。因此，$X(s)$的收敛域包括整个 s 平面。

3.3 设

$$x(t)=\begin{cases}e^{-at} & 0\leqslant t\leqslant T\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

找出 $x(t)$的拉普拉斯变换。

解　由式(3.3)

$$X(s)=\int_0^T e^{-at}e^{-st}dt=\int_0^T e^{-(s+a)t}dt$$

$$=-\frac{1}{s+a}e^{-(s+a)t}\Big|_0^T=\frac{1}{s+a}[1-e^{-(s+a)T}] \tag{3.58}$$

因为 $x(t)$是一个有界信号，$X(s)$的收敛域为整个 s 平面。注意，式(3.58)显示 $X(s)$在 $s=-a$ 处不收敛，但不是这样。没式(3.58)的积分中 $s=-a$，有

$$X(-a)=\int_0^T e^{-(s+a)t}dt=\int_0^T dt=T$$

对式(3.58)使用 L'Hospital 规则可以得到相同的结果。

3.4 证明：如果 $x(t)$是一个右边信号，且 $X(s)$对任意 s 均收敛，则 $X(s)$的收敛域为

$$\mathrm{Re}(s)>\sigma_{\max}$$

其中，$\sigma_{\max}$等于 $X(s)$极点的最大实部。

解　由于 $x(t)$是右边信号，则

$$x(t)=0\qquad t<t_1$$

且 $X(s)$在 $\mathrm{Re}(s)=\sigma_0$ 处收敛，则

$$|X(s)|\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)e^{-st}|dt=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|e^{-\sigma_0 t}dt$$

$$=\int_{t_1}^{\infty}|x(t)|e^{-\sigma_0 t}dt<\infty$$

设 $\mathrm{Re}(s)=\sigma_1>\sigma_0$，则

$$\int_{t_1}^{\infty}|x(t)|e^{-\sigma_1 t}dt=\int_{t_1}^{\infty}|x(t)|e^{-\sigma_0 t}e^{-(\sigma_1-\sigma_0)t}$$

$$<e^{-(\sigma_1-\sigma_0)t_1}\int_{t_1}^{\infty}|x(t)|e^{-\sigma_0 t}dt<\infty$$

因此，$X(s)$在 $\mathrm{Re}(s)=\sigma_1$ 处收敛，$X(s)$的收敛域为 $\mathrm{Re}(s)>\sigma_0$。由于 $X(s)$的收敛域不包含任何极点，则可以得到

$$\mathrm{Re}(s)>\sigma_{\max}$$

其中，$\sigma_{\max}$等于 $X(s)$极点的最大实部。

3.5 找出下列信号 $x(t)$的拉普拉斯变换 $X(s)$，画出零极点图和收敛域：

(a) $x(t)=e^{-2t}u(t)+e^{-3t}u(t)$

(b) $x(t)=e^{-3t}u(t)+e^{2t}u(-t)$

(c) $x(t)=e^{2t}u(t)+e^{-3t}u(-t)$

解　(a)由表 3.1，得

$$e^{-2t}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s+2}\qquad \mathrm{Re}(s)>-2 \tag{3.59}$$

$$e^{-3t}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s+3}\qquad \mathrm{Re}(s)>-3 \tag{3.60}$$

可以看出，式(3.59)和(3.60)的收敛域重叠，因此

$$X(s)=\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+3}=\frac{2\left(s+\frac{5}{2}\right)}{(s+2)(s+3)}\qquad \mathrm{Re}(s)>-2 \tag{3.61}$$

由式(3.61)可以看出，$X(s)$在 $s=-\frac{5}{2}$ 处有一个零点，在 $s=-2$ 和 $s=-3$ 处有两个极点，收敛域为 $\mathrm{Re}(s)>-2$，如图 3-11(a)所示。

(b)由表 3.1，得

$$e^{-3t}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s+3}\qquad \mathrm{Re}(s)>-3 \tag{3.62}$$

$$e^{2t}u(-t)\leftrightarrow-\frac{1}{s-2}\qquad \mathrm{Re}(s)<2 \tag{3.63}$$

可以看出，式(3.62)和(3.63)的收敛域重叠，因此

$$X(s)=\frac{1}{s+3}-\frac{1}{s-2}=\frac{-5}{(s-2)(s+3)}\qquad -3<\mathrm{Re}(s)<2 \tag{3.64}$$

由式(3.64)可以看出，$X(s)$没有零点，在 $s=2$ 和 $s=-3$ 处有两个极点，收敛域为 $-3<\mathrm{Re}(s)<2$，如图 3-11(b)所示。

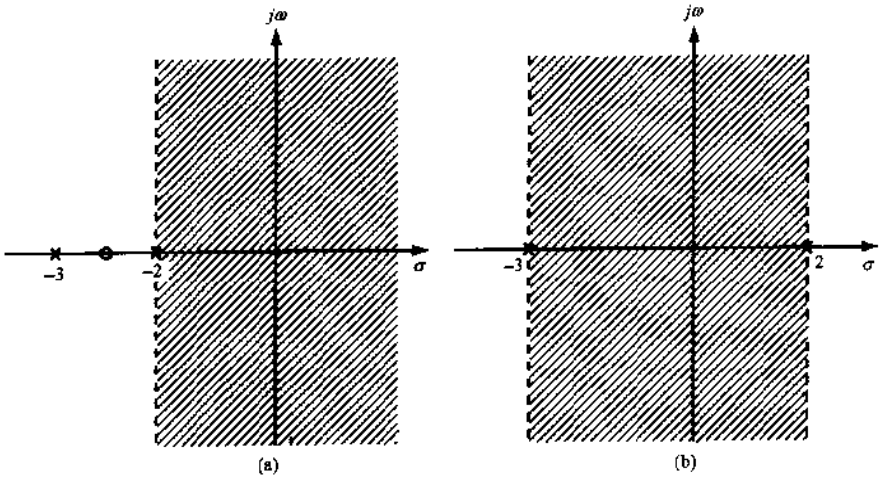


图 3-11

(c)由表 3.1，得

$$e^{2t}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s-2}\qquad \mathrm{Re}(s)>2 \tag{3.65}$$

$$e^{-3t}u(-t)\leftrightarrow-\frac{1}{s+3}\qquad \mathrm{Re}(s)<-3 \tag{3.66}$$

可以看出，式(3.62)和(3.63)的收敛域没有重叠，没有公共的收敛域。因此，$x(t)$没有拉普拉斯变换 $X(s)$。

3.6 设

$$x(t)=e^{-a|t|}$$

找出 $X(s)$，画出零极点图以及 $a>0$ 和 $a<0$ 时的收敛域。

[redacted] $a>0$ 和 $a<0$ 时的信号 $x(t)$如图 3.12(a)和(b)所示。因为 $x(t)$是双边信号，可以表示为

$$x(t)=e^{-at}u(t)+e^{at}u(-t) \tag{3.67}$$

注意，$x(t)$在 $t=0$ 处是连续的，且 $x(0^-)=x(0)=x(0^+)=1$。由表 3.1，得

$$e^{-at}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{s+a}\qquad \mathrm{Re}(s)>-a \tag{3.68}$$

$$e^{at}u(-t)\leftrightarrow-\frac{1}{s-a}\qquad \mathrm{Re}(s)<a \tag{3.69}$$

如果 $a>0$，可以看出，式(3.68)和(3.69)的收敛域重叠，因此

$$X(s)=\frac{1}{s+a}-\frac{1}{s-a}=\frac{-2a}{s^2-a^2}\qquad -a<\mathrm{Re}(s)<a \tag{3.70}$$

由(3.70)可以看出，$X(s)$没有零点，在 $s=a$ 和 $s=-a$ 处有两个极点，收敛域为 $-a<\mathrm{Re}(s)<a$，如图 3-12(c)所示。如果 $a<0$，可以看出，式(3.68)和(3.69)的收敛域不重叠，没有公共的收敛域。因此，$x(t)$没有拉普拉斯变换 $X(s)$。

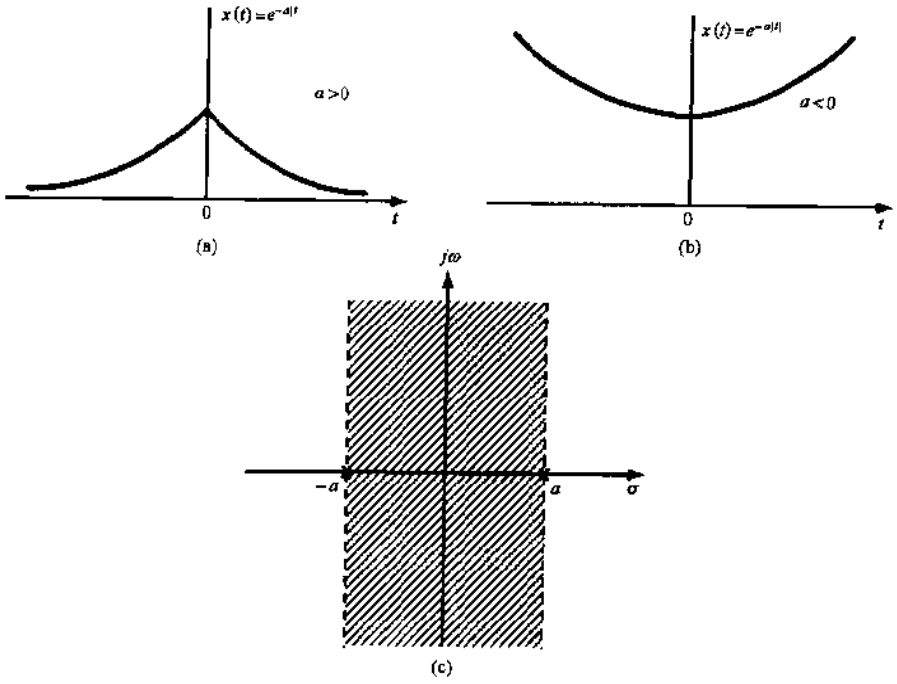


图 3-12

拉普拉斯变换的性质

3.7 验证时间平移性质式(3.16),即

$$x(t-t_0)\leftrightarrow e^{-st_0}X(s) \qquad R'=R$$

[redacted] 由定义式(3.3)

$$\mathscr{L}[x(t-t_0)]=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-t_0)e^{-st}dt$$

改变变量 $\tau=t-t_0$,得

$$\mathscr{L}[x(t-t_0)]=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)e^{-s(\tau+t_0)}d\tau$$

$$=e^{-st_0}\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)e^{-s\tau}d\tau=e^{-st_0}X(s)$$

与 $X(s)$有相同的收敛域。因此

$$x(t-t_0)\leftrightarrow e^{-st_0}X(s) \qquad R'=R$$

3.8 验证时间比例性质式(3.18),即

$$x(at)\leftrightarrow\frac{1}{|a|}X\left(\frac{s}{a}\right) \qquad R'=aR$$

[redacted] 由定义式(3.3)

$$\mathscr{L}[x(at)]=\int_{-\infty}^{\infty}x(at)e^{-st}dt$$

当 $a>0$ 时,改变变量 $\tau=at$ 得

$$\mathscr{L}[x(at)]=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)e^{-(s/a)\tau}d\tau=\frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right) \qquad R'=aR$$

注意,由于变换中由比例因子 s/a,$X(s/a)$的收敛域是 aR。当 $a<0$ 时,得

$$\mathscr{L}[x(at)]=\frac{1}{a}\int_{\infty}^{-\infty}x(\tau)e^{-(s/a)\tau}d\tau$$

$$=-\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)e^{-(s/a)\tau}d\tau=-\frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right) \qquad R'=aR$$

因此,将 $a>0$ 和 $a<0$ 时的结果组合起来,可以得到以下关系:

$$x(at)\leftrightarrow\frac{1}{|a|}X\left(\frac{s}{a}\right) \qquad R'=aR$$

3.9 求出下列信号的拉普拉斯变换及其相关的收敛域：

(a)$x(t)=\delta(t-t_0)$

(b)$x(t)=u(t-t_0)$

(c)$x(t)=e^{-2t}[u(t)-u(t-5)]$

(d)$x(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kT)$

(e)$x(t)=\delta(at+b)$，a、b 为实常数

[redacted] (a)利用式(3.13)和(3.16)，得

$$\delta(t-t_0)\leftrightarrow e^{-st_0} \qquad \text{对所有 } s \tag{3.71}$$

(b)利用式(3.14)和(3.16)，得

$$u(t-t_0)\leftrightarrow \frac{e^{-st_0}}{s} \qquad \mathrm{Re}(s)>0 \tag{3.72}$$

(c)改写 $x(t)$ 为

$$\begin{aligned}x(t)&=e^{-2t}[u(t)-u(t-5)]=e^{-2t}u(t)-e^{-2t}u(t-5)\\&=e^{-2t}u(t)-e^{-10}e^{-2(t-5)}u(t-5)\end{aligned}$$

则由表3.1和式(3.16)，得

$$X(s)=\frac{1}{s+2}-e^{-10}e^{-5s}\frac{1}{s+2}=\frac{1}{s+2}(1-e^{-5(s+2)}) \qquad \mathrm{Re}(s)>-2$$

(d)利用式(3.71)和(1.99)，得

$$X(s)=\sum_{k=0}^{\infty}e^{-skT}=\sum_{k=0}^{\infty}(e^{-sT})^k=\frac{1}{1-e^{-sT}} \qquad \mathrm{Re}(s)>0 \tag{3.73}$$

(e)设

$$f(t)=\delta(at)$$

则由式(3.13)和(3.18)，得

$$f(t)=\delta(at)\leftrightarrow F(s)=\frac{1}{|a|} \qquad \text{对所有 } s \tag{3.74}$$

现在

$$x(t)=\delta(at+b)=\delta\left[a\left(t+\frac{b}{a}\right)\right]=f\left(t+\frac{b}{a}\right)$$

利用式(3.16)和(3.74)，得

$$X(s)=e^{sb/a}F(s)=\frac{1}{|a|}e^{sb/a} \qquad \text{对所有 } s \tag{3.75}$$

3.10 验证时间微分性质式(3.20)，即

$$\frac{dx(t)}{dt}\leftrightarrow sX(s) \qquad R'\supset R$$

[redacted] 由式(3.24)，反拉普拉斯变换为

$$x(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}X(s)e^{st}ds \tag{3.76}$$

上式两端对 t 微分，得

$$\frac{dx(t)}{dt}=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}sX(s)e^{st}ds \tag{3.77}$$

比较式(3.77)和(3.76)可知，dx/dt 是 $sX(s)$ 的反拉普拉斯变换。因此，

$$\frac{dx(t)}{dt}\leftrightarrow sX(s) \qquad R'\supset R$$

注意：如果在 $s=0$ 处不存在零极点抵消，则相关的收敛域不会改变。

3.11 验证 s 域微分性质式(3.21)，即

$$-tx(t)\leftrightarrow\frac{dX(s)}{ds} \qquad R'=R$$

[redacted] 由定义式(3.3)

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

上式两端对 s 微分，得

$$\frac{dX(s)}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} (-t)x(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{\infty} [-tx(t)]e^{-st}dt$$

因此，得

$$-tx(t) \leftrightarrow \frac{dX(s)}{ds} \qquad R' = R$$

3.12 验证积分性质(3.22)，即

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s}X(s) \qquad R' = R \cap \{\mathrm{Re}(s) > 0\}$$

[redacted] 设

$$f(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \leftrightarrow F(s)$$

则

$$x(t) = \frac{df(t)}{dt}$$

利用微分性质式(3.20)，得

$$X(s) = sF(s)$$

因此，

$$F(s) = \frac{1}{s}X(s) \qquad R' = R \cap \{\mathrm{Re}(s) > 0\}$$

收敛域 R' 可能会引入在 $s=0$ 处并乘以 $1/s$ 的极点。

3.13 利用各种拉普拉斯变换的性质，由 $u(t)$ 的拉普拉斯变换推导下列信号的拉普拉斯变换。

(a)$\delta(t)$；(b)$\delta'(t)$；(c)$tu(t)$；(d)$e^{-at}u(t)$；(e)$te^{-at}u(t)$；(f)$\cos\omega_0 tu(t)$；(g)$e^{-at}\cos\omega_0 tu(t)$

[redacted] (a)由式(3.14)，得

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s} \qquad \mathrm{Re}(s) > 0$$

由式(1.30)，得

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

因此，利用时间微分性质式(3.20)得

$$\delta(t) \leftrightarrow s\frac{1}{s} = 1 \qquad \text{对所有 } s$$

(b)对(a)中的结果再次使用时间微分性质式(3.20)，得

$$\delta'(t) \leftrightarrow s \qquad \text{对所有 } s \tag{3.78}$$

(c)利用 s 域微分性质式(3.21)，得

$$tu(t) \leftrightarrow -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s^2} \qquad \mathrm{Re}(s) > 0 \tag{3.79}$$

(d)利用 s 域平移性质式(3.17)，得

$$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a} \qquad \mathrm{Re}(s) > -a$$

(e)根据(a)的结果，并利用 s 域微分性质式(3.21)，得

$$te^{-at}u(t) \leftrightarrow -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+a}\right) = \frac{1}{(s+a)^2} \qquad \mathrm{Re}(s) > -a \tag{3.80}$$

(f)根据 Euler 公式，

$$\cos\omega_0 tu(t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})u(t) = \frac{1}{2}e^{j\omega_0 t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}u(t)$$

利用线性性质式(3.15)和 s 域平移性质式(3.17)，得

$$\cos\omega_0 tu(t) \leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{1}{s-j\omega_0} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+j\omega_0} = \frac{s}{s^2+\omega_0^2} \qquad \mathrm{Re}(s) > 0 \tag{3.81}$$

(g)对(f)的结果应用 s 域平移性质式(3.17),得

$$e^{-at}\cos\omega_0 t u(t) \leftrightarrow \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2} \qquad \mathrm{Re}(s) > -a \tag{3.82}$$

3.14 验证卷积性质式(3.23),即

$$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(s)X_2(s) \qquad R' \supset R \cap R_2$$

解 设

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau$$

则由定义式(3.3)

$$\begin{aligned} Y(s) &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau\right]e^{-st}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t-\tau)e^{-st}dt\right]d\tau \end{aligned}$$

注意,后一个表达式中括号内的项是平移后信号 $x_2(t-\tau)$ 的拉普拉斯变换。由式(3.16),得

$$\begin{aligned} Y(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-s\tau}X_2(s)d\tau \\ &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-s\tau}d\tau\right]X_2(s) = X_1(s)X_2(s) \end{aligned}$$

其收敛域包含 $X_1(s)$ 和 $X_2(s)$ 收敛域的交集。如果一个变换的零点可以抵消另一个变换的极点,则 $Y(s)$ 的收敛域也许更大一些。因此,得

$$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(s)X_2(s) \qquad R' \supset R_1 \cap R_2$$

3.15 利用卷积性质式(3.23)验证式(3.22),即

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s}X(s) \qquad R' = R \cap \{\mathrm{Re}(s) > 0\}$$

解 可以写为[式(2.60),习题2.2]

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau = x(t) * u(t) \tag{3.83}$$

由式(3.14)

$$u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s} \qquad \mathrm{Re}(s) > 0$$

因此,由卷积性质式(3.23)得

$$x(t) * u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s}X(s)$$

其收敛域包含 $X(s)$ 和 $u(t)$ 的拉普拉斯变换收敛域的交集。因此,

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s}X(s) \qquad R' = R \cap \{\mathrm{Re}(s) > 0\}$$

反拉普拉斯变换

3.16 找出下列 $X(s)$ 的反拉普拉斯变换:

(a) $X(s) = \dfrac{1}{s+1}, \mathrm{Re}(s) > -1$

(b) $X(s) = \dfrac{1}{s+1}, \mathrm{Re}(s) < -1$

(c) $X(s) = \dfrac{s}{s^2+4}, \mathrm{Re}(s) > 0$

(d) $X(s) = \dfrac{s+1}{(s+1)^2+4}, \mathrm{Re}(s) > -1$

解 (a)由表3.1得

$$x(t) = e^{-t}u(t)$$

(b)由表 3.1 得

$$x(t) = -e^{-t}u(-t)$$

(c)由表 3.1 得

$$x(t) = \cos 2tu(t)$$

(d)由表 3.1 得

$$s(t) = e^{-t}\cos 2tu(t)$$

3.17 找出下列 $X(s)$的反拉普拉斯变换：

(a)$X(s)=\dfrac{2s+4}{s^2+4s+3}$, $\mathrm{Re}(s)>-1$

(b)$X(s)=\dfrac{2s+4}{s^2+4s+3}$, $\mathrm{Re}(s)<-3$

(c)$X(s)=\dfrac{2s+4}{s^2+4s+3}$, $-3<\mathrm{Re}(s)<-1$

[redacted] 用部分分式展开，得

$$X(s) = \frac{2s+4}{s^2+4s+3} = 2\frac{s+2}{(s+1)(s+3)} = \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{s+3}$$

利用式(3.30) 得

$$c_1 = (s+1)X(s)\big|_{s=-1} = 2\left.\frac{s+2}{s+3}\right|_{s=-1} = 1$$

$$c_2 = (s+3)X(s)\big|_{s=-3} = 2\left.\frac{s+2}{s+1}\right|_{s=-3} = 1$$

因此

$$X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+3}$$

(a)$X(s)$的收敛域是 $\mathrm{Re}(s)>-1$。因此，$x(t)$是一个右边信号，由表 3.1 得

$$x(t) = e^{-t}u(t) + e^{-3t}u(t) = (e^{-t} + e^{-3t})u(t)$$

(b)$X(s)$的收敛域是 $\mathrm{Re}(s)<-3$。因此，$x(t)$是一个左边信号，由表 3.1 得

$$x(t) = -e^{-t}u(-t) - e^{-3t}u(-t) = -(e^{-t} + e^{-3t})u(-t)$$

(c)$X(s)$的收敛域是 $-3<\mathrm{Re}(s)<-1$。因此，$x(t)$是一个双边信号，由表 3.1 得

$$x(t) = -e^{-t}u(-t) + e^{-3t}u(t)$$

3.18 找出下面 $X(s)$的反拉普拉斯变换：

$$X(s) = \frac{5s+13}{s(s^2+4s+13)},\quad \mathrm{Re}(s)>0$$

[redacted] 可以写为

$$s^2 + 4s + 13 = (s+2)^2 + 9 = (s+2-j3)(s+2+j3)$$

则

$$X(s) = \frac{5s+13}{s(s^2+4s+13)} = \frac{5s+13}{s(s+2-j3)(s+2+j3)}$$

$$= \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s-(-2+j3)} + \frac{c_3}{s-(-2-j3)}$$

其中，

$$c_1 = sX(s)\big|_{s=0} = \left.\frac{5s+13}{s^2+4s+13}\right|_{s=0} = 1$$

$$c_2 = (s+2-j3)X(s)\big|_{s=-2+j3} = \left.\frac{5s+13}{s(s+2+j3)}\right|_{s=-2+j3} = -\frac{1}{2}(1+j)$$

$$c_3 = (s+2+j3)X(s)\big|_{s=-2-j3} = \left.\frac{5s+13}{s(s+2-j3)}\right|_{s=-2-j3} = -\frac{1}{2}(1-j)$$

因此

$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{2}(1+j)\frac{1}{s-(-2+j3)} - \frac{1}{2}(1-j)\frac{1}{s-(-2-j3)}$$

$X(s)$的收敛域是 $\mathrm{Re}(s)>0$。因此，$x(t)$是一个右边信号，由表 3.1 得

$$x(t) = u(t) - \frac{1}{2}(1+j)e^{(-2+j3)t}u(t) - \frac{1}{2}(1-j)e^{(-2-j3)t}u(t)$$

在上面的式子中代入

$$e^{(-2\pm j3)t} = e^{-2t}e^{\pm j3t} = e^{-2t}(\cos 3t \pm j\sin 3t)$$

经过简单的计算后，得

$$\begin{aligned} x(t) &= u(t) - e^{-2t}(\cos 3t - \sin 3t)u(t) \\ &= [1 - e^{-2t}(\cos 3t - \sin 3t)]u(t) \end{aligned}$$

另一种解答：

可以将 $X(s)$ 写为

$$X(s) = \frac{5s+13}{s(s^2+4s+13)} = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2 s + c_3}{s^2+4s+13}$$

与前面一样，由式(3.30)，得

$$c_1 = sX(s)\big|_{s=0} = \left.\frac{5s+13}{s^2+4s+13}\right|_{s=0} = 1$$

则有

$$\frac{c_2 s + c_3}{s^2+4s+13} = \frac{5s+13}{s(s^2+4s+13)} - \frac{1}{s} = \frac{-s+1}{s^2+4s+13}$$

因此，

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{s} - \frac{s-1}{s^2+4s+13} = \frac{1}{s} - \frac{s+2-3}{(s+2)^2+9} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s+2}{(s+2)^2+9} + \frac{3}{(s+2)^2+9} \end{aligned}$$

由表3.1得

$$\begin{aligned} x(t) &= u(t) - e^{-2t}\cos 3tu(t) + e^{-2t}\sin 3tu(t) \\ &= [1 - e^{-2t}(\cos 3t - \sin 3t)]u(t) \end{aligned}$$

3.19 找出下面 $X(s)$ 的反拉普拉斯变换：

$$X(s) = \frac{s^2+2s+5}{(s+3)(s+5)^2}, \quad \mathrm{Re}(s) > -3$$

[redacted] 可以看出，$X(s)$ 在 $s=-3$ 处有一个单极点，在 $s=-5$ 处有一个二重极点，则由式(3.29)和(3.31)，得

$$X(s) = \frac{c_1}{s+3} + \frac{\lambda_1}{s+5} + \frac{\lambda_2}{(s+5)^2} \tag{3.84}$$

由式(3.30)和(3.32)，得

$$c_1 = (s+3)X(s)\big|_{s=-3} = \left.\frac{s^2+2s+5}{(s+5)^2}\right|_{s=-3} = 2$$

$$\lambda_2 = (s+5)^2X(s)\big|_{s=-5} = \left.\frac{s^2+2s+5}{s+3}\right|_{s=-5} = -10$$

$$\lambda_1 = \frac{d}{ds}[(s+5)^2X(s)]\big|_{s=-5} = \left.\frac{d}{ds}\left[\frac{s^2+2s+5}{s+3}\right]\right|_{s=-5}$$

$$= \left.\frac{s^2+6s+1}{(s+3)^2}\right|_{s=-5} = -1$$

因此，

$$X(s) = \frac{2}{s+3} - \frac{1}{s+5} - \frac{10}{(s+5)^2}$$

$X(s)$ 的收敛域是 $\mathrm{Re}(s) > -3$。因此，$x(t)$ 是一个右边信号，由表3.1得

$$\begin{aligned} x(t) &= 2e^{-3t}u(t) - e^{-5t}u(t) - 10te^{-5t}u(t) \\ &= [2e^{-3t} - e^{-5t} - 10te^{-5t}]u(t) \end{aligned}$$

注意，计算 λ_1 有更简单的方法，不需要使用微分。方法如下：首先按照一般方法找到 c_1 和 λ_2，然后将 c_1 和 λ_2 的值代入式(3.84)，得

$$\frac{s^2+2s+5}{(s+3)(s+5)^2} = \frac{2}{s+3} + \frac{\lambda_1}{s-5} - \frac{10}{(s+5)^2}$$

设等式两端 $s=0$,得

$$\frac{5}{75}=\frac{2}{3}+\frac{\lambda_1}{5}-\frac{10}{25}$$

由此可得 $\lambda_1=-1$。

3.20 找出下列 $X(s)$的反拉普拉斯变换:

(a)$X(s)=\dfrac{2s+1}{s+2}$, $\mathrm{Re}(s)>-2$

(b)$X(s)=\dfrac{s^2+6s+7}{s^2+3s+2}$, $\mathrm{Re}(s)>-1$

(c)$X(s)=\dfrac{s^3+2s^2+6}{s^2+3s}$, $\mathrm{Re}(s)>0$

[redacted] (a)　　$X(s)=\dfrac{2s+1}{s+2}=\dfrac{2(s+2)-3}{s+2}=2-\dfrac{3}{s+2}$

由于 $X(s)$的收敛域是 $\mathrm{Re}(s)>-2$。因此,$x(t)$是一个右边信号,由表 3.1 得

$$x(t)=2\delta(t)-3e^{-2t}u(t)$$

(b)进行长除,得

$$X(s)=\frac{s^2+6s+7}{s^2+3s+2}=1+\frac{3s+5}{s^2+3s+2}=1+\frac{3s+5}{(s+1)(s+2)}$$

设

$$X_1(s)=\frac{3s+5}{(s+1)(s+2)}=\frac{c_1}{s+1}+\frac{c_2}{s+2}$$

其中

$$c_1=(s+1)X_1(s)\mid_{s=-1}=\left.\frac{3s+5}{s+2}\right|_{s=-1}=2$$

$$c_2=(s+2)X_1(s)\mid_{s=-2}=\left.\frac{3s+5}{s+1}\right|_{s=-2}=1$$

因此,

$$X(s)=1+\frac{2}{s+1}+\frac{1}{s+2}$$

$X(s)$的收敛域是 $\mathrm{Re}(s)<-1$。因此,$x(t)$是一个右边信号,由表 3.1 得

$$x(t)=\delta(t)+(2e^{-t}+e^{-2t})u(t)$$

(c)进行类似的处理,得

$$X(s)=\frac{s^3+2s^2+6}{s^2+3s}=s-1+\frac{3s+6}{s(s+3)}$$

设

$$X_1(s)=\frac{3s+6}{s(s+3)}=\frac{c_1}{s}+\frac{c_2}{s+3}$$

其中

$$c_1=sX_1(s)\mid_{s=0}=\left.\frac{3s+6}{s+3}\right|_{s=0}=2$$

$$c_2=(s+3)X_1(s)\mid_{s=-3}=\left.\frac{3s+6}{s}\right|_{s=-3}=1$$

因此,

$$X(s)=s-1+\frac{2}{s}+\frac{1}{s+3}$$

$X(s)$的收敛域是 $\mathrm{Re}(s)>0$。因此,$x(t)$是一个右边信号,由表 3.1 和式(3.78)得

$$x(t)=\delta'(t)-\delta(t)+(2+e^{-3t})u(t)$$

注意,本题中的所有 $X(s)$都是假分数,$x(t)$都包含 $\delta(t)$或 $\delta(t)$的导数。

3.21 找出下面 $X(s)$的反拉普拉斯变换:

$$X(s)=\frac{2+2se^{-2s}+4e^{4s}}{s^2+4s+3}, \quad \mathrm{Re}(s)>-1$$

[redacted] 可以看出,$X(s)$是一个和式

$$X(s) = X_1(s) + X_2(s)e^{-2s} + X_3(s)e^{-4s}$$

其中

$$X_1(s) = \frac{2}{s^2 + 4s + 3} \qquad X_2(s) = \frac{2s}{s^2 + 4s + 3} \qquad X_3(s) = \frac{4}{s^2 + 4s + 3}$$

如果

$$x_1(t) \leftrightarrow X_1(s) \qquad x_2(t) \leftrightarrow X_2(s) \qquad x_3(t) \leftrightarrow X_3(s)$$

则由线性性质式(3.15)和时间平移性质式(3.16),得

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t-2) + x_3(t-4) \tag{3.85}$$

接下来,使用部分分式展开法,由表 3.1 得

$$X_1(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3} \leftrightarrow x_1(t) = (e^{-t} - 3e^{-3t})u(t)$$

$$X_2(s) = \frac{-1}{s+1} + \frac{3}{s+3} \leftrightarrow x_2(t) = (-e^{-t} + 3e^{-3t})u(t)$$

$$X_3(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+3} \leftrightarrow x_3(t) = 2(e^{-t} - 3e^{-3t})u(t)$$

因此,由式(3.85),得

$$x(t) = (e^{-t} - e^{-3t})u(t) + [-e^{-(t-2)} + 3e^{-3(t-2)}]u(t-2) + 2[e^{-(t-4)} - e^{-3(t-4)}]u(t-4)$$

3.22 利用 s 域微分性质式(3.21),找出下面 $X(s)$的反拉普拉斯变换:

$$X(s) = \frac{1}{(s+a)^2}, \mathrm{Re}(s) > -a$$

[redacted]

$$-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+a}\right) = \frac{1}{(s+a)^2}$$

由式(3.9),得

$$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a} \qquad \mathrm{Re}(s) > -a$$

因此,利用 s 域微分性质式(3.21),得

$$x(t) = te^{-at}u(t)$$

系统函数

3.23 找出图 1-32(习题 1.32)中 RC 电路的系统函数 $H(s)$和冲激响应 $h(t)$。

[redacted] (a)设

$$x(t) = v_s(t) \qquad y(t) = v_c(t)$$

在这种情况下,RC 电路可以描述为[式(1.105)]

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{RC}x(t)$$

对上式进行拉普拉斯变换,得

$$sY(s) + \frac{1}{RC}Y(s) = \frac{1}{RC}X(s)$$

或

$$\left(s + \frac{1}{RC}\right)Y(s) = \frac{1}{RC}X(s)$$

因此由式(3.37),系统函数 $H(s)$为

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1/RC}{s + 1/RC} = \frac{1}{RC}\frac{1}{s + 1/RC}$$

因为系统是因果的,对 $H(s)$进行反拉普拉斯变换,则冲激响应 $h(t)$为

$$h(t) = \mathscr{L}^{-1}\{H(s)\} = \frac{1}{RC}e^{-t/RC}u(t)$$

(b)设

$$x(t) = v_s(t) \qquad y(t) = i(t)$$

在这种情况下,RC 电路可以描述为[式(1.107)]

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{1}{R}\frac{dx(t)}{dt}$$

对上式进行拉普拉斯变换，得

$$sY(s) + \frac{1}{RC}Y(s) = \frac{1}{R}sX(s)$$

或

$$\left(s + \frac{1}{RC}\right)Y(s) = \frac{1}{R}sX(s)$$

因此，系统函数 $H(s)$ 为

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s/R}{s + 1/RC} = \frac{1}{R}\frac{s}{s + 1/RC}$$

在这种情况下，系统函数 $H(s)$ 是一个假分式，可以改写为

$$H(s) = \frac{1}{R}\frac{s + 1/RC - 1/RC}{s + 1/RC} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R^2C}e^{-t/RC}u(t)$$

因为系统是因果的，对 $H(s)$ 进行反拉普拉斯变换，则冲激响应 $h(t)$ 为

$$h(t) = \mathcal{L}\{H(s)\} = \frac{1}{R}\delta(t) - \frac{1}{R^2C}e^{-t/RC}u(t)$$

注意，不同的输入输出组合可以得到不同的系统函数。

3.24 利用拉普拉斯变换，重做习题 2.5。

[redacted] 由习题 2.5，得

$$h(t) = e^{-\alpha t}u(t) \qquad x(t) = e^{\alpha t}u(-t) \qquad \alpha > 0$$

利用表 3.1，得

$$H(s) = \frac{1}{s + \alpha} \qquad \mathrm{Re}(s) > -\alpha$$

$$X(s) = -\frac{1}{s - \alpha} \qquad \mathrm{Re}(s) < \alpha$$

因此

$$Y(s) = X(s)H(s) = -\frac{1}{(s + \alpha)(s - \alpha)} = -\frac{1}{s^2 - \alpha^2} \qquad -\alpha < \mathrm{Re}(s) < \alpha$$

由表 3.1(或习题 3.6)，输出为

$$y(t) = \frac{1}{2\alpha}e^{-\alpha|t|}$$

与式(2.67)相同。

3.25 一个连续时间 LTI 系统，当输入 $x(t)$ 为 $u(t)$ 时，输出 $y(t)$ 为 $2e^{-3t}u(t)$。

(a) 找出系统的冲激响应 $h(t)$。

(b) 当输入 $x(t)$ 为 $e^{-t}u(t)$ 时，找出输出 $y(t)$。

[redacted] (a)

$$x(t) = u(t) \qquad y(t) = 2e^{-3t}u(t)$$

对 $x(t)$ 和 $y(t)$ 进行拉普拉斯变换，得

$$X(s) = \frac{1}{s} \qquad \mathrm{Re}(s) > 0$$

$$Y(s) = \frac{2}{s + 3} \qquad \mathrm{Re}(s) > -3$$

因此，系统函数 $H(s)$ 为

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2s}{s + 3} \qquad \mathrm{Re}(s) > -3$$

改写 $H(s)$ 为

$$H(s) = \frac{2s}{s + 3} = \frac{2(s + 3) - 6}{s + 3} = 2 - \frac{6}{s + 3} \qquad \mathrm{Re}(s) > -3$$

对 $H(s)$ 进行反拉普拉斯变换，得

$$h(t) = 2\delta(t) - 6e^{-3t}u(t)$$

注意，$h(t)$ 等于 $2e^{-3t}u(t)$ 的导数，是系统的阶跃响应 $s(t)$[见式(2.13)]。

(b)

$$x(t) = e^{-t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+1} \qquad \mathrm{Re}(s) > -1$$

因此

$$Y(s) = X(s)H(s) = \frac{2s}{(s+1)(s+3)} \qquad \mathrm{Re}(s) > -1$$

利用部分分式展开法,得

$$Y(s) = -\frac{1}{s+1} + \frac{3}{s+3}$$

对 $Y(s)$进行反拉普拉斯变换,得

$$y(t) = (-e^{-t} + 3e^{-3t})u(t)$$

3.26 如果一个连续时间LTI系统是BIBO稳定的,则证明其系统函数 $H(s)$的收敛域必须包含虚轴,即 $s = j\omega$。

[redacted] 当且仅当其冲激响应 $h(t)$是绝对可积的,一个连续时间LTI系统才是BIBO稳定的,即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < \infty$$

由式(3.3)

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st}dt$$

设 $s = j\omega$,则

$$|H(j\omega)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt\right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)e^{-j\omega t}|\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt < \infty$$

因此,可以看出,如果系统是稳定的,则 $H(s)$在 $s = j\omega$ 处是收敛的。即对一个稳定的连续时间LTI系统而言,$H(s)$的收敛域必须包含虚轴 $s = j\omega$。

3.27 利用拉普拉斯变换,重做习题2.14。

[redacted] (a)利用式(3.36)和(3.41),得

$$Y(s) = X(s)H_1(s)H_2(s) = X(s)H(s)$$

其中,$H(s) = H_1(s)H_2(s)$是整个系统的系统函数。现在,由表3.1,得

$$h_1(t) = e^{-2t}u(t) \leftrightarrow H_1(s) = \frac{1}{s+2} \quad \mathrm{Re}(s) > -2$$

$$h_2(t) = 2e^{-t}u(t) \leftrightarrow H_2(s) = \frac{2}{s+1} \quad \mathrm{Re}(s) > -1$$

因此

$$H(s) = H_1(s)H_2(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2} \quad \mathrm{Re}(s) > -1$$

对 $H(s)$进行反拉普拉斯变换,得

$$h(t) = 2(e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

(b)由于 $H(s)$的收敛域为 $\mathrm{Re}(s) > -1$,包含 $j\omega$-轴,所以整个系统是稳定的。

3.28 利用拉普拉斯变换,重做习题2.23。

[redacted] 该系统的描述如下

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t)$$

对上式两端进行拉普拉斯变换,得

$$sY(s) + aY(s) = X(s) \qquad 或 \qquad (s+a)Y(s) = X(s)$$

因此系统函数 $H(s)$为

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s+a}$$

假设系统是因果的,对 $H(s)$进行反拉普拉斯变换,则冲激响应 $h(t)$为

$$h(t) = e^{-at}u(t)$$

与式(2.124)相同。

3.29 利用拉普拉斯变换,重做习题2.25。

[redacted] 该系统的描述如下

$$y'(t) + 2y(t) = x(t) + x'(t)$$

对上式两端进行拉普拉斯变换，得

$$sY(s) + 2Y(s) = X(s) + sX(s)$$

或

$$(s+2)Y(s) = (s+1)X(s)$$

因此系统函数 $H(s)$为

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+1}{s+2} = \frac{s+2-1}{s+2} = 1 - \frac{1}{s+2}$$

假设系统是因果的，对 $H(s)$进行反拉普拉斯变换，则冲激响应 $h(t)$为

$$h(t) = \delta(t) - e^{-2t}u(t)$$

3.30 设一个连续时间 LTI 系统的输入 $x(t)$和输出 $y(t)$的关系为

$$y''(t) + y'(t) - 2y(t) = x(t) \tag{3.86}$$

(a)找出系统函数 $H(s)$。

(b)确定下列三种情况下的冲激响应 $h(t)$：(i)系统是因果的 (ii)系统是稳定的 (iii)系统既不是因果的也不是稳定的。

[redacted] (a)对式(3.86)$H(s)$进行拉普拉斯变换，得

$$s^2Y(s) + sY(s) - 2Y(s) = X(s)$$

或

$$(s^2 + s - 2)Y(s) = X(s)$$

因此系统函数 $H(s)$为

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 + s - 2} = \frac{1}{(s+2)(s-1)}$$

(b)利用部分分式展开法，得

$$H(s) = \frac{1}{(s+2)(s-1)} = -\frac{1}{3}\frac{1}{s+2} + \frac{1}{3}\frac{1}{s-1}$$

(i)如果系统是因果的，则 $h(t)$是因果的(即右边信号)，且 $H(s)$的收敛域为 $\mathrm{Re}(s) > 1$。因此，由表 3.1 得

$$h(t) = -\frac{1}{3}(e^{-2t} - e^{t})u(t)$$

(ii)如果系统是稳定的，则 $H(s)$的收敛域必须包含 $j\omega$ 轴，为 $-2 < \mathrm{Re}(s) < 1$。因此，$h(t)$是双边信号，由表3.1 得

$$h(t) = -\frac{1}{3}e^{-2t}u(t) - \frac{1}{3}e^{t}u(-t)$$

(iii)如果系统既不是因果的也不是稳定的，则 $H(s)$的收敛域为 $\mathrm{Re}(s) < -2$。因此，$h(t)$是非因果的(即左边信号)，由表 3.1 得

$$h(t) = \frac{1}{3}e^{-2t}u(-t) - \frac{1}{3}e^{t}u(-t)$$

3.31 如图 3-13 所示，有两个子系统反馈连接在一起，其系统函数分别为 $F(s)$和 $G(s)$。找出整个反馈系统的系统函数 $H(s)$。

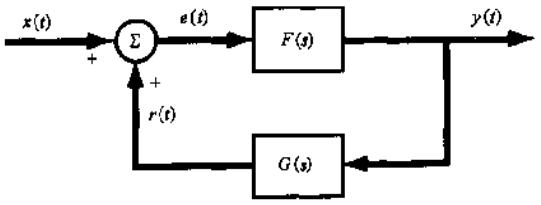


图 3-13 反馈系统

[redacted] 设

$$x(t) \leftrightarrow X(s) \qquad y(t) \leftrightarrow Y(s) \qquad r(t) \leftrightarrow R(s) \qquad e(t) \leftrightarrow E(s)$$

则

$$Y(s) = E(s)F(s) \tag{3.87}$$

$$R(s) = Y(s)G(s) \tag{3.88}$$

因为

$$e(t) = x(t) + r(t)$$

得

$$E(s) = X(s) + R(s) \tag{3.89}$$

将式(3.88)代入式(3.89),然后再把结果代入式(3.87),得

$$Y(s) = [X(s) + Y(s)G(s)]F(s)$$

或

$$[1 - F(s)G(s)]Y(s) = F(s)X(s)$$

因此,整个系统函数为

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{F(s)}{1 - F(s)G(s)} \tag{3.90}$$

单边拉普拉斯变换

3.32 验证式(3.44)和(3.45),即

(a) $\dfrac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow sX_I(s) - x(0^-)$

(b) $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} \leftrightarrow s^2X_I(s) - sx(0^-) - x'(0^-)$

[redacted] (a)利用式(3.43),进行积分,得

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_I\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} &= \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt}e^{-st}dt \\ &= x(t)e^{-st}\Big|_{0^-}^{\infty} + s\int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}dt \\ &= -x(0^-) + sX_I(s) \qquad \mathrm{Re}(s) > 0\end{aligned}$$

因此,得

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow sX_I(s) - x(0^-)$$

(b)将上面性质应用到信号 $x'(t) = dx(t)/dt$,得

$$\begin{aligned}\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt}\frac{dx(t)}{dt} &\leftrightarrow s[sX_I(s) - x(0^-)] - x'(0^-) \\ &= s^2X_I(s) - sx(0^-) - x'(0^-)\end{aligned}$$

注意,式(3.46)可以通过继续应用以上过程得到。

3.33 验证式(3.47)和(3.48),即

(a) $\displaystyle\int_{0^-}^{t} x(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s}X_I(s)$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s}X_I(s) + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-} x(\tau)d\tau$

[redacted] (a)设

$$g(t) = \int_{0^-}^{t} x(\tau)d\tau$$

则

$$\frac{dg(t)}{dt} = x(t) \qquad \text{且} \qquad g(0^-) = 0$$

现在,如果

$$g(t) \leftrightarrow G_I(s)$$

则由式(3.44)

$$X_I(s) = sG_I(s) - g(0^-) = sG_I(s)$$

因此

$$G_I(s) = \frac{1}{s}X_I(s)$$

或

$$\int_{0^-}^{t} x(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s}X_I(s)$$

(b)

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{0^-} x(\tau)d\tau + \int_{0^-}^{t} x(\tau)d\tau$$

注意,右边第一项是一个常数。因此,对上式进行单边拉普拉斯变换,并利用式(3.47)得

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \leftrightarrow \frac{1}{s}X_I(s) + \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-} x(\tau)d\tau$$

3.34 (a)证明 $x(t)$的双边拉普拉斯变换可以由两个单边拉普拉斯变换得到。
(b)利用(a)的结果,找出 $e^{-2|t|}$的双边拉普拉斯变换。

解 (a)式(3.3)中定义的 $x(t)$的双边拉普拉斯变换可以表示为

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{0^-} x(t)e^{-st}dt + \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}dt \\ &= \int_{0^-}^{\infty} x(-t)e^{st}dt + \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}dt \end{aligned} \tag{3.91}$$

现在

$$\int_{0_-}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = X_I(s) \qquad \mathrm{Re}(s) > \sigma^+ \tag{3.92}$$

接着,设

$$\mathscr{L}_I\{x(-t)\} = X_I^-(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(-t)e^{-st}dt \qquad \mathrm{Re}(s) > \sigma^- \tag{3.93}$$

则

$$\int_{0^-}^{\infty} x(-t)e^{st}dt = \int x(-t)e^{-(-s)t}dt = X_I^-(-s) \qquad \mathrm{Re}(s) < \sigma^- \tag{3.94}$$

因此,将式(3.92)和(3.94)代入式(3.91),得

$$X(s) = X_I(s) + X_I^-(-s) \qquad \sigma^+ < \mathrm{Re}(s) < \sigma^- \tag{3.95}$$

(b) $$x(t) = e^{-2|t|}$$

(i)当 $t>0$ 时,$x(t) = e^{-2t}$,则

$$\mathscr{L}_I\{x(t)\} = X_I(s) = \frac{1}{s+2} \qquad \mathrm{Re}(s) > -2$$

(ii)当 $t<0$ 时,$x(t) = e^{2t}$,则 $t<0$ 时,$x(-t) = e^{-2t}$

$$\mathscr{L}_I\{x(-t)\} = X_I^-(s) = \frac{1}{s+2} \qquad \mathrm{Re}(s) > -2$$

因此

$$X_I^-(-s) = \frac{1}{-s+2} = -\frac{1}{s-2} \qquad \mathrm{Re}(s) < 2$$

(iii)根据式(3.95),得

$$\begin{aligned} X(s) &= X_I(s) + X_I^-(-s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s-2} \\ &= -\frac{4}{s^2-4} \qquad -2 < \mathrm{Re}(s) < 2 \end{aligned} \tag{3.96}$$

上式等于习题 3.6 中 $a=2$ 的式(3.70)。

3.35 证明:

(a) $$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX_I(s) \tag{3.97}$$

(b) $$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX_I(s) \tag{3.98}$$

对单边拉普拉斯变换而言,式(3.97)称为初值定理,式(3.98)称为终值定理。

解 (a)利用式(3.44),得

$$\begin{aligned} sX_I(s) - x(0^-) &= \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt \\ &= \int_{0^-}^{0^+} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt + \int_{0^+}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt \\ &= x(t) \Big|_{0^-}^{0^+} + \int_{0^+}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt \\ &= x(0^+) - x(0^-) + \int_{0^+}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt \end{aligned}$$

因此

$$sX_I(s) = x(0^+) + \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt$$

且

$$\begin{aligned} \lim_{s\to\infty} sX_I(s) &= x(0^+) + \lim_{s\to\infty} \int_{0^+}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt \\ &= x(0^+) + \int_{0^+}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} \left(\lim_{s\to\infty} e^{-st} \right) dt = x(0^+) \end{aligned}$$

因为 $\lim_{s\to\infty} e^{-st} = 0$。

(b)再利用式(3.44),得

$$\begin{aligned} \lim_{s\to 0} [sX_I(s) - x(0^-)] &= \lim_{s\to 0} \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt \\ &= \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} \left(\lim_{s\to 0} e^{-st} \right) dt \\ &= \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} dt = x(t) \Big|_{0^-}^{\infty} \\ &= \lim_{t\to\infty} x(t) - x(0^-) \end{aligned}$$

因为

$$\lim_{s\to 0} [sX_I(s) - x(0^-)] = \lim_{s\to 0} [sX_I(s)] - x(0^-)$$

因此

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} sX_I(s)$$

3.36 单边拉普拉斯变换有时定义为

$$\mathscr{L}_+ [x(t)] = X_I^+(s) = \int_{0^+}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \tag{3.99}$$

0^+ 为下限(该定义有时称为 0^+ 定义)。

(a)证明

$$\mathscr{L}_+ \left[\frac{dx(t)}{dt} \right] = X_I^+(s) - x(0^+) \qquad \mathrm{Re}(s) > 0 \tag{3.100}$$

(b)证明

$$\mathscr{L}_+ [u(t)] = \frac{1}{s} \tag{3.101}$$

$$\mathscr{L}_+ [\delta(t)] = 0 \tag{3.102}$$

解 (a)设 $x(t)$有的单边拉普拉斯变换 $X_I^+(s)$。利用式(3.99)并进行积分,得

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_+ \left[\frac{dx(t)}{dt} \right] &= \int_{0^+}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt \\ &= x(t) e^{-st} \Big|_{0^+}^{\infty} + s \int_{0^+}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \\ &= -x(0^+) + sX_I^+(s) \qquad \mathrm{Re}(s) > 0 \end{aligned}$$

因此,有

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow sX_I^+(s) - x(0^+)$$

(b)由式(3.99)

$$\mathscr{L}_+ \{u(t)\} = \int_{0^+}^{\infty} u(t)e^{-st}dt = \int_{0^+}^{\infty} e^{-st}dt$$

$$= -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_{0^+}^{\infty} = \frac{1}{s} \qquad \mathrm{Re}(s) > 0$$

由式(1.30),有

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \tag{3.103}$$

对式(3.103)进行 0^+ 拉普拉斯变换,利用式(3.100),得

$$\mathscr{L}_+ \{\delta(t)\} = s\frac{1}{s} - u(0^+) = 1 - 1 = 0$$

这与式(1.21)是一致的,即

$$\mathscr{L}_+ \{\delta(t)\} = \int_{0^+}^{\infty} \delta(t)e^{-st}dt = 0$$

注意,对式(3.103)进行 0^- 拉普拉斯变换,利用式(3.44),得

$$\mathscr{L}_- \{\delta(t)\} = s\frac{1}{s} - u(0^-) = 1 - 0 = 1$$

单边拉普拉斯变换应用

3.37 利用单边拉普拉斯变换重做习题 2.20。

[redacted] 该系统为

$$y'(t) + ay(t) = x(t) \tag{3.104}$$

且 $y(0) = y_0, x(t) = Ke^{-bt}u(t)$。

假设 $y(0) = y(0^-)$。设

$$y(t) \leftrightarrow Y_I(s)$$

则由式(3.44)

$$y'(t) \leftrightarrow sY_I(s) - y(0^-) = sY_I(s) - y_0$$

由表 3.1 得

$$x(t) \leftrightarrow X_I(s) = \frac{K}{s+b} \qquad \mathrm{Re}(s) > -b$$

对式(3.104)进行单边拉普拉斯变换,得

$$[sY_I(s) - y_0] + aY_I(s) = \frac{K}{s+b}$$

或

$$(s+a)Y_I(s) = y_0 + \frac{K}{s+b}$$

因此

$$Y_I(s) = \frac{y_0}{s+a} + \frac{K}{(s+a)(s+b)}$$

利用部分分式展开法,得

$$Y_I(s) = \frac{y_0}{s+a} + \frac{K}{a-b}\left(\frac{1}{s+b} - \frac{1}{s+a}\right)$$

对 $Y_I(s)$ 进行反拉普拉斯变换,得

$$y(t) = \left[y_0e^{-at} + \frac{K}{a-b}(e^{-bt} - e^{-at})\right]u(t)$$

这与式(2.107)相同。注意,$y(0^+) = y(0) = y(0^-) = y_0$,$y(t)$ 可以写为

$$y(t) = y_0e^{-at} + \frac{K}{a-b}(e^{-bt} - e^{-at}) \qquad t \geqslant 0$$

3.38 解二阶线性微分方程

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = x(t) \tag{3.105}$$

且初始条件 $y(0) = 2, y'(0) = 1, x(t) = e^{-t}u(t)$。

[redacted] 假设 $y(0) = y(0^-), y'(0) = y'(0^-)$。设

$$y(t) \leftrightarrow Y_I(s)$$

则由式(3.44)和(3.45)

$$y'(t)\leftrightarrow sY_I(s)-y(0^-)=sY_I(s)-2$$

$$y''(t)\leftrightarrow s^2Y_I(s)-sy(0^-)-y'(0^-)=s^2Y_I(s)-2s-1$$

由表3.1得

$$x(t)\leftrightarrow X_I(s)=\frac{1}{s+1}$$

对式(3.105)进行单边拉普拉斯变换,得

$$[s^2Y_I(s)-2s-1]+5[sY_I(s)-2]+6Y_I(s)=\frac{1}{s+1}$$

或

$$(s^2+5s+6)Y_I(s)=\frac{1}{s+1}+2s+11=\frac{2s^2+13s+12}{s+1}$$

因此

$$Y_I(s)=\frac{2s^2+13s+12}{(s+1)(s^2+5s+6)}=\frac{2s^2+13s+12}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

利用部分分式展开法,得

$$Y_I(s)=\frac{1}{2}\frac{1}{s+1}+6\frac{1}{s+2}-\frac{9}{2}\frac{1}{s+3}$$

对$Y_I(s)$进行反拉普拉斯变换,得

$$y(t)=\left(\frac{1}{2}e^{-t}+6e^{-2t}-\frac{9}{2}e^{-3t}\right)u(t)$$

注意,$y(0^+)=2=y(0)$,$y'(0^+)=1=y'(0)$,$y(t)$可以写为

$$y(t)=\frac{1}{2}e^{-t}+6e^{-2t}-\frac{9}{2}e^{-3t}\qquad t\geqslant 0$$

3.39 考虑如图3-14(a)所示的*RC*电路,在$t=0$时开关闭合。假设电容上有一个初始电压,且$v_c(0^-)=v_0$。

(a)找出电流$i(t)$。

(b)找出电容两端的电压$v_c(t)$。

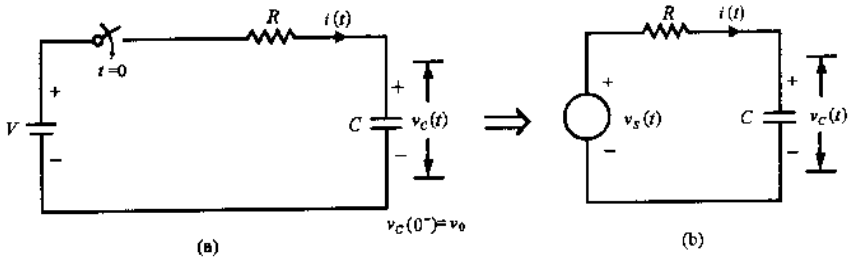


图3-14 *RC*电路

[redacted] (a)随着开关闭合,图3-14(a)所示的电路可以用图3-14(b)所示的电路表示,且$v_s(t)=Vu(t)$。如果输入为$v_s(t)$,输出为$i(t)$,则控制该电路的微分方程为

$$Ri(t)+\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}i(\tau)d\tau=v_s(t)\tag{3.106}$$

对式(3.106)进行单边拉普拉斯变换,并利用式(3.48),得

$$RI(s)+\frac{1}{C}\left[\frac{1}{s}I(s)+\frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-}i(\tau)d\tau\right]=\frac{V}{s}\tag{3.107}$$

其中

$$I(s)=\mathscr{L}_I[i(t)]$$

现在

$$v_c(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}i(\tau)d\tau$$

且

$$v_c(0^-)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{0^-}i(\tau)d\tau=v_0$$

因此，式(3.107)简化为

$$\left(R+\frac{1}{Cs}\right)I(s)+\frac{v_0}{s}=\frac{V}{s}$$

解出 $I(s)$，得

$$I(s)=\frac{V-v_0}{s}\frac{1}{R+1/Cs}=\frac{V-v_0}{R}\frac{1}{s+1/RC}$$

对 $I(s)$进行反拉普拉斯变换，得

$$i(t)=\frac{V-v_0}{R}e^{-t/RC}u(t)$$

(b)如果输入为 $v_i(t)$，输出为 $v_c(t)$，则控制该电路的微分方程为

$$\frac{dv_c(t)}{dt}+\frac{1}{RC}v_c(t)=\frac{1}{RC}v_i(t) \tag{3.108}$$

对式(3.108)进行单边拉普拉斯变换，并利用式(3.44)，得

$$sV_c(s)-v_c(0^-)+\frac{1}{RC}V_c(s)=\frac{1}{RC}\frac{V}{s}$$

或

$$\left(s+\frac{1}{RC}\right)V_c(s)=\frac{1}{RC}\frac{V}{s}+v_0$$

解出 $V_c(s)$，得

$$\begin{aligned}V_c(s)&=\frac{V}{RC}\frac{1}{s(s+1/RC)}+\frac{v_0}{s+1/RC}\\&=V\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1/RC}\right)+\frac{v_0}{s+1/RC}\end{aligned}$$

对 $V_c(s)$进行反拉普拉斯变换，得

$$v_c(t)=V(1-e^{-t/RC})u(t)+v_0e^{-t/RC}u(t)$$

注意，$v_c(0^+)=v_0=v_c(0^-)$，因此 $v_c(t)$可以写为

$$v_c(t)=V(1-e^{-t/RC})+v_0e^{-t/RC}\qquad t\geqslant 0$$

3.40 利用变换网络技术重做习题 3.39。

(a)利用图 3-10，对应图 3-14 的变换网络结构如图 3-15 所示。

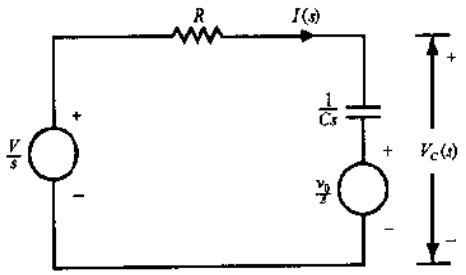


图 3-15 变换电路

根据回路电压定律，得

$$\left(R+\frac{1}{Cs}\right)I(s)+\frac{v_0}{s}=\frac{V}{s}$$

解出 $I(s)$，得

$$I(s)=\frac{V-v_0}{s}\frac{1}{R+1/Cs}=\frac{V-v_0}{R}\frac{1}{s+1/RC}$$

对 $I(s)$进行反拉普拉斯变换，得

$$i(t)=\frac{V-v_0}{R}e^{-t/RC}u(t)$$

(b)由图 3-15，得

$$V_c(s)=\frac{1}{Cs}I(s)+\frac{v_0}{s}$$

将(a)中的结果代入上式，得

$$V_c(s) = \frac{V - v_0}{RC}\frac{1}{s(s + 1/RC)} + \frac{v_0}{s}$$
$$= (V - v_0)\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/RC}\right) + \frac{v_0}{s}$$
$$= V\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1/RC}\right) + \frac{v_0}{s + 1/RC}$$

对 $V_c(s)$进行反拉普拉斯变换，得

$$v_c(t) = V(1 - e^{-t/RC})u(t) + v_0 e^{-t/RC}u(t)$$

3.41 在图3-16(a)所示的电路中，开关在 $t=0$ 时刻打开之前一直处于闭合位置。找出 $t \geqslant 0$ 的电感电流 $i(t)$。

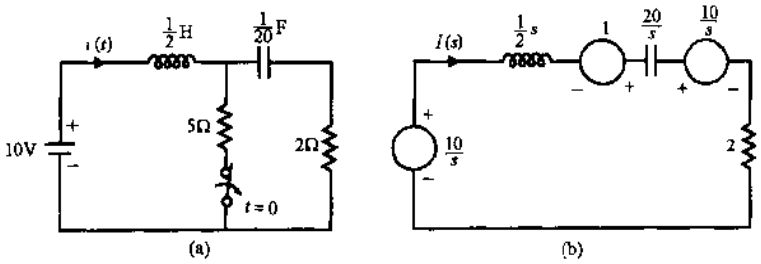


图 3-16

[redacted] 当开关长时间处于闭合位置时，电容的电压被充到10V，电容中没有电流，电感就像短路，电感电流为 $\frac{10}{5} = 2\text{A}$。

因此，当开关打开时，有 $i(0^-) = 2$，$v_c(0^-) = 10$，输入电压为10V，可以表示为 $10u(t)$。因此，利用图3-10，可以建立如图3-16(b)所示的变换电路。

由图3-16(b)，回路方程为

$$\frac{1}{2}sI(s) - 1 + 2I(s) + \frac{20}{s}I(s) + \frac{10}{s} = \frac{10}{s}$$

或

$$\left(\frac{1}{2}s + 2 + \frac{20}{s}\right)I(s) = 1$$

因此，

$$I(s) = \frac{1}{\frac{1}{2}s + 2 + 20/s} = \frac{2s}{s^2 + 4s + 40}$$
$$= \frac{2(s + 2) - 4}{(s + 2)^2 + 6^2} = 2\frac{(s + 2)}{(s + 2)^2 + 6^2} - \frac{2}{3}\frac{6}{(s + 2)^2 + 6^2}$$

对 $I(s)$进行反拉普拉斯变换，得

$$i(t) = e^{-2t}\left(2\cos 6t - \frac{2}{3}\sin 6t\right)u(t)$$

注意，$i(0^+) = 2 = i(0^-)$，即开关打开前后电感电流没有中断。因此，有

$$i(t) = e^{-2t}\left(2\cos 6t - \frac{2}{3}\sin 6t\right) \qquad t \geqslant 0$$

3.42 考虑如图3-17(a)所示的电路。两个开关在 $t=0$ 时刻同时闭合。电容 C_1 和 C_2 上的电压在开关闭合之前分别为1V和2V。

(a)找出电流 $i_1(t)$和 $i_2(t)$。

(b)找出 $t=0^+$ 时刻电容两端的电压。

[redacted] (a)根据给定的初始条件，得

$$v_{C_1}(0^-) = 1\text{V} \qquad v_{C_2}(0^-) = 2\text{V}$$

因此，利用图3-10，可以建立如图3-17(b)所示的变换电路。由图3-17(b)，可以直接写出回路方程

$$\left(2 + \frac{1}{s}\right)I_1(s) - 2I_2(s) = \frac{4}{s}$$

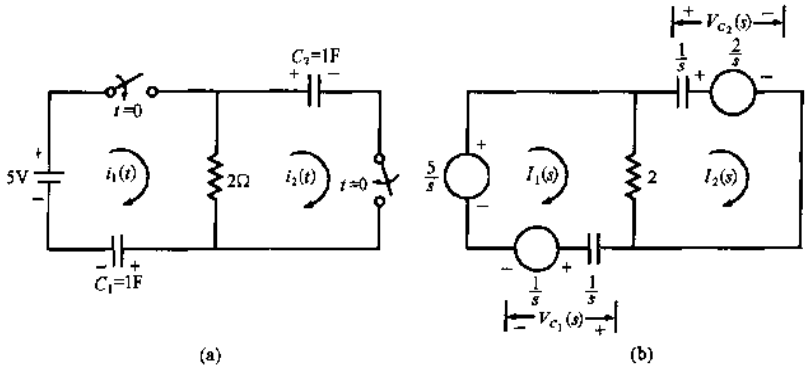


图 3-17

$$-2I_1(s)+\left(2+\frac{1}{s}\right)I_2(s)=-\frac{2}{s}$$

解出 $I_1(s)$和 $I_2(s)$,得

$$I_1(s)=\frac{s+1}{s+\frac{1}{4}}=\frac{s+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}{s+\frac{1}{4}}=1+\frac{3}{4}\frac{1}{s+\frac{1}{4}}$$

$$I_2(s)=\frac{s-\frac{1}{2}}{s+\frac{1}{4}}=\frac{s+\frac{1}{4}-\frac{3}{4}}{s+\frac{1}{4}}=1-\frac{3}{4}\frac{1}{s+\frac{1}{4}}$$

对 $I_1(s)$和 $I_2(s)$进行反拉普拉斯变换,得

$$i_1(t)=\delta(t)+\frac{3}{4}e^{-t/4}u(t)$$

$$i_2(t)=\delta(t)-\frac{3}{4}e^{-t/4}u(t)$$

(b)由图 3-17(b),得

$$V_{C_1}(s)=\frac{1}{s}I_1(s)+\frac{1}{s}$$

$$V_{C_2}(s)=\frac{1}{s}I_2(s)+\frac{2}{s}$$

将在(a)中得到的 $I_1(s)$和 $I_2(s)$代入以上表达式,得

$$V_{C_1}(s)=\frac{1}{s}\frac{s+1}{s+\frac{1}{4}}+\frac{1}{s}$$

$$V_{C_2}(s)=\frac{1}{s}\frac{s-\frac{1}{2}}{s+\frac{1}{4}}+\frac{2}{s}$$

则,利用初值定理式(3.97),得

$$v_{C_1}(0^+)=\lim_{s\to\infty}sV_{C_1}(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{s+1}{s+\frac{1}{4}}+1=1+1=2\text{V}$$

$$v_{C_2}(0^+)=\lim_{s\to\infty}sV_{C_2}(s)=\lim_{s\to\infty}\frac{s-\frac{1}{2}}{s+\frac{1}{4}}+2=1+2=3\text{V}$$

注意,$v_{C_1}(0^+)\neq v_{C_1}(0^-)$,$v_{C_2}(0^+)\neq v_{C_2}(0^-)$。这是由于电路中存在电容回路,会引起电容两端电压的突然改变,电压的这种阶跃变化会引起 $i_1(t)$和 $i_2(t)$中出现冲激信号。有电容回路或电感星型连接的电路称为退化电路。

补充习题

3.43　找出下列 $x(t)$的拉普拉斯变换:

(a)$x(t)=\sin\omega_0 tu(t)$

(b)$x(t)=\cos(\omega_0 t+\varphi)u(t)$

(c)$x(t)=e^{-at}u(t)-e^{at}u(-t)$

(d)$x(t)=1$

(e)$x(t)=\text{sgn}\ t$

答案 (a)$X(s)=\dfrac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$, $\quad \text{Re}(s)>0$

(b)$X(s)=\dfrac{s\cos\varphi-\omega_0\sin\varphi}{s^2+\omega_0^2}$, $\quad \text{Re}(s)>0$

(c)如果 $a>0, X(s)=\dfrac{2s}{s^2-a^2}$, $\quad -2<\text{Re}(s)<a$。如果 $a<0, X(s)$不存在,因为 $X(s)$没有收敛域。

(d)**提示** $x(t)=u(t)+u(-t)$

$X(s)$不存在,因为 $X(s)$没有收敛域。

(e)**提示** $x(t)=u(t)-u(-t)$

$X(s)$不存在,因为 $X(s)$没有收敛域 。

3.44 找出下面 $x(t)$的拉普拉斯变换:

$$x(t)=\begin{cases}1 & t_1\leqslant t\leqslant t_2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

答案 $X(s)=\dfrac{1}{s}[e^{-st_1}-e^{-st_2}]$,对所有 s

3.45 证明:如果 $x(t)$是一个左边信号,且 $X(s)$在某些 s 值时收敛,则 $X(s)$的收敛域为:

$$\text{Re}(s)<\sigma_{\min}$$

其中,$\sigma_{\min}$等于 $X(s)$极点的最小实数部分。

提示 与习题 3.4 类似。

3.46 验证式(3.21),即

$$-tx(t)\leftrightarrow\frac{dX(s)}{ds}\qquad R'=R$$

提示 对式(3.3)两端求 s 的微分。

3.47 证明下列拉普拉斯变换的性质:

(a)如果 $x(t)$是偶函数,则 $X(-s)=X(s)$,即 $X(s)$也是偶函数。

(b)如果 $x(t)$是奇函数,则 $X(-s)=-X(s)$,即 $X(s)$也是奇函数。

(c)如果 $x(t)$是奇函数,则 $X(s)$在 $s=0$ 处为 0。

提示 (a)利用式(1.2)和(3.17)。

(b)利用式(1.3)和(3.17)。

(c)利用(b)的结果和式(1.83a)。

3.48 找出下面 $x(t)$的拉普拉斯变换:

$$x(t)=(e^{-t}\cos 2t-5e^{-2t})u(t)+\frac{1}{2}e^{2t}u(-t)$$

答案 $X(s)=\dfrac{s+1}{(s+1)^2+4}-\dfrac{5}{s+2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{s-2}$, $\quad -1<\text{Re}(s)<2$

3.49 找出下列 $X(s)$的反拉普拉斯变换:

(a)$X(s)=\dfrac{1}{s(s+1)^2}$, $\quad \text{Re}(s)>-1$

(b)$X(s)=\dfrac{1}{s(s+1)^2}$, $\quad -1<\text{Re}(s)<0$

(c)$X(s)=\dfrac{1}{s(s+1)^2}$, $\quad \text{Re}(s)<-1$

(d)$X(s)=\dfrac{s+1}{s^2+4s+13}$, $\quad \text{Re}(s)>-2$

(e)$X(s)=\dfrac{s}{(s^2+4)^2}$, $\quad \text{Re}(s)>0$

(f)$X(s)=\dfrac{s}{s^3+2s^2+9s+18}$, $\quad \text{Re}(s)>-2$

提示　(a)$x(t)=(1-e^{-t}-te^{-t})u(t)$

(b)$x(t)=-u(-t)-(1+t)e^{-t}u(t)$

(c)$x(t)=(-1+e^{-t}+te^{-1})u(-t)$

(d)$x(t)=e^{-2t}(\cos 3t-\frac{1}{3}\sin 3t)u(t)$

(e)$x(t)=\frac{1}{4}t\sin 2tu(t)$

(f)$x(t)=(-\frac{2}{13}e^{-2t}+\frac{2}{13}\cos 3t+\frac{3}{13}\sin 3t)u(t)$

3.50　利用拉普拉斯变换重做习题 2.46。

提示　利用式(3.21)和表 3.1。

3.51　利用拉普拉斯变换,证明

(a)$x(t)*\delta(t)=x(t)$

(b)$x(t)*\delta'(t)=x'(t)$

提示　(a)利用式(3.21)和表 3.1。

(b)利用式(3.18)、(3.21)和表 3.1。

3.52　利用拉普拉斯变换重做习题 2.54。

提示　(a)用式(3.32)找出系统函数 $H(s)$并对 $H(s)$进行拉普拉斯反变换。

(b)找出 $H(s)$的收敛域,并指出收敛域不包含 $j\omega$ 轴。

3.53　一个连续时间 LTI 系统有

$$h(t)=e^{-2t}u(t)$$

找出下列输入所对应的输出 $y(t)$。

(a)$x(t)=e^{-t}u(t)$

(b)$x(t)=e^{-t}u(-t)$

答案　(a)$y(t)=(e^{-t}-e^{-2t})u(t)$

(b)$y(t)=e^{-t}u(-t)+e^{-2t}u(t)$

3.54　一个连续时间 LTI 系统的阶跃响应为$(1-e^{-t})u(t)$。对一个未知的

$$x(t)=2(1-e^{-3t})u(t)$$

3.55　确定如图 3-18 所示系统的系统函数 $H(s)$。

提示　利用习题 3.31 的结果,简化框图。

答案　$H(s)=\frac{s}{s^3+3s^2+s-2}$

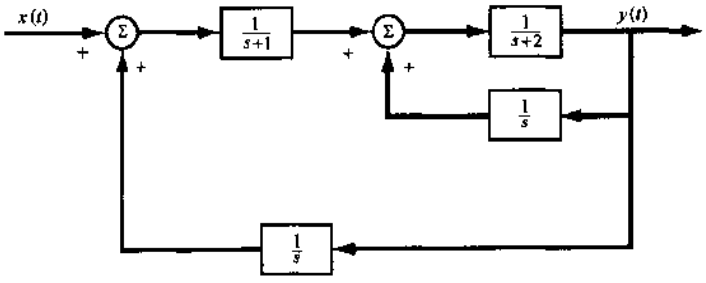


图 3-18

3.56　如果 $x(t)$是一个基本周期为 T 的周期信号,找出 $x(t)$的单边拉普拉斯变换。

答案　$X(s)=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_{0^-}^{T}x(t)e^{-st}dt$　　$\mathrm{Re}(s)>0$

3.57　求出如图 3-19 所示周期信号的单边拉普拉斯变换。

答案　(a)$X(s)=\frac{1}{s(1+e^{-s})}$, $\mathrm{Re}(s)>0$

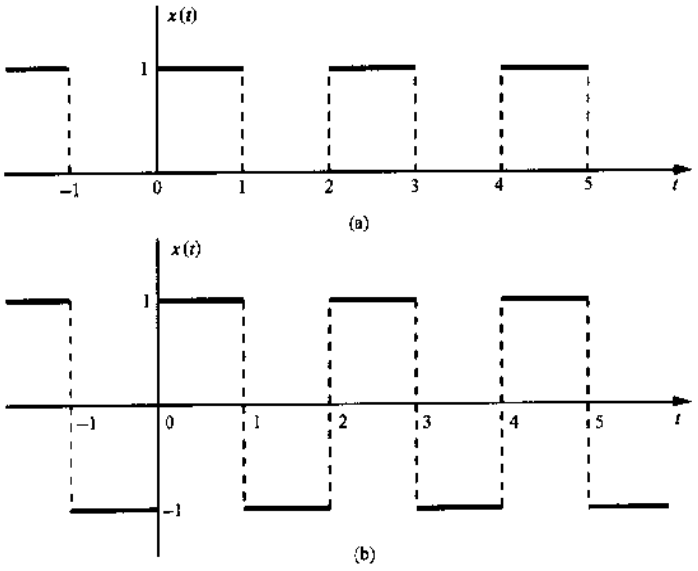


图 3-19

(b) $X(s)=\dfrac{1-e^{-s}}{s(1+e^{-s})}$, $\mathrm{Re}(s)>0$

3.58 利用单边拉普拉斯变换，求解下式

$$y''(t)-y'(t)-6y(t)=e^{t}$$

初始条件为：在 $t\geqslant 0$ 时，$y(0)=1$，$y'(0)=0$。

答案 $y(t)=-\dfrac{1}{6}e^{t}+\dfrac{2}{3}e^{-2t}+\dfrac{1}{2}e^{3t}$，$t\geqslant 0$

3.59 利用单边拉普拉斯变换，求解下面方程组

$$y'(t)+y(t)+x'(t)+x(t)=1$$
$$y'(t)-y(t)-2x(t)=0$$

初始条件为：在 $t\geqslant 0$ 时，$x(0)=0$，$y(0)=1$。

答案 $x(t)=e^{-t}-1$，$y(t)=2-e^{-t}$，$t\geqslant 0$

3.60 利用单边拉普拉斯变换，求解下列积分方程：

(a) $y(t)=1+a\int_0^t y(\tau)d\tau$，$t\geqslant 0$

(b) $y(t)=e^{t}\left[1+\int_0^t e^{-\tau}y(\tau)d\tau\right]$，$t\geqslant 0$

答案 (a) $y(t)=e^{at}$，$t\geqslant 0$

(b) $y(t)=e^{2t}$，$t\geqslant 0$

3.61 考虑如图 3-20 所示的 RC 电路。开关在 $t=0$ 时刻闭合。开关闭合前的电容电压为 v_0。求出 $t\geqslant 0$ 时的电容电压。

答案 $v_c(t)=v_0e^{-t/RC}$，$t\geqslant 0$

3.62 考虑如图 3-21 所示的 RC 电路。开关在 $t=0$ 时刻闭合。开关闭合前，电容 C_1 被充到 v_0V，电容 C_2 没有充电。

(a)假设 $C_1=C_2=C$，求出 $t\geqslant 0$ 时的电流 $i(t)$。

(b)求出电阻 R 上的总能量消耗 E，并证明 E 与 R 无关，E 等于 C_1 中所存初始能量的一半。

(c)假设 $R=0$，$C_1=C_2=C$，求出 $t\geqslant 0$ 时的电流 $i(t)$ 和电压 $v_{C_1}(0^+)$、$v_{C_2}(0^+)$。

答案 (a) $i(t)=(v_0/R)e^{-2t/RC}$，$t\geqslant 0$

(b) $E=\dfrac{1}{4}v_0^2C$

(c) $i(t)=\dfrac{1}{2}v_0C\delta(t)$，$v_{C_1}(0^+)=v_0/2\neq v_{C_1}(0^-)=v_0$，$v_{C_2}(0^+)=v_0/2\neq v_{C_2}(0^-)=0$

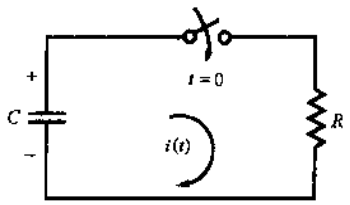


图 3-20

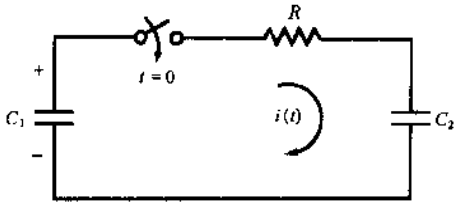


图 3-21

第4章 z变换与离散时间LTI系统

4.1 简介

在第3章,我们介绍了拉普拉斯变换。本章将介绍z变换,这是拉普拉斯变换的离散时间形式。z变换用于表示在z域中的离散时间信号(或序列)。本章还要介绍离散时间LTI系统的系统函数的概念。我们知道,拉普拉斯变换将微积分方程转换成代数方程,同样,z变换将差分方程转换成代数方程,简化了离散时间系统的分析。

z变换的性质与拉普拉斯变换的某些性质很相似,但是,我们也将看到,z变换与拉普拉斯变换之间有着较大的区别。

4.2 z变换

在2.8节中我们得知,对一个有冲激响应$h[n]$的离散时间LTI系统,z^n型复指数输入的系统输出$y[n]$为

$$y[n] = \mathbf{T}\{z^n\} = H[z]z^n \tag{4.1}$$

其中

$$H[z] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n} \tag{4.2}$$

A. 定义

式(4.2)中的函数$H(z)$是指$h[n]$的z变换。对一般的离散时间信号$x[n]$而言,z变换$X(z)$可以定义为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \tag{4.3}$$

变量z一般是复数,且表示为极坐标形式

$$z = re^{j\Omega} \tag{4.4}$$

其中,r是z的幅度,Ω是z的角度。式(4.3)中定义的z变换常称为双边z变换。相反,单边z变换可以定义为

$$X_I(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \tag{4.5}$$

显然,只有在$n<0$时有$x[n]=0$,双边z变换和单边z变换才等效。单边z变换在4.8节介绍。除了容易混淆的地方,本章省略"双边"两字。

与拉普拉斯变换情况相同,式(4.3)有时也可以看作是一个将序列$x[n]$变为函数$X(z)$的算子,用符号表示为

$$X(z) = \mathscr{Z}\{x[n]\} \tag{4.6}$$

并且称$x[n]$和$X(z)$形成了z变换对,表示为

$$x[n] \leftrightarrow X(z) \tag{4.7}$$

B. 收敛域

与拉普拉斯变换一样,使z变换收敛的复变量z的值范围称为收敛域。下面用几个例子来说明z变换及其有关的收敛域。

例 4.1　考虑序列

$$x[n] = a^n u[n] \qquad a \text{ 为实数} \tag{4.8}$$

由式(4.3),$x[n]$的 z 变换为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n$$

对 $X(z)$的收敛域,要求

$$\sum_{n=0}^{\infty} |az^{-1}|^n < \infty$$

因此,$X(z)$的收敛域是使$|az^{-1}|<1$ 的 z 值范围,等效为$|z|>|a|$,则

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z|>|a| \tag{4.9}$$

也可以将式(4.9)的分子、分母同时乘以 z 值,则可以写为

$$X(z) = \frac{z}{z-a} \qquad |z|>|a| \tag{4.10}$$

式(4.9)和(4.10)哪种形式的 $X(z)$更有用取决于具体的应用情况。由式(4.10)可以看出,$X(z)$是 z 的有理函数。因此,与有理拉普拉斯变换一样,$X(z)$可以用其零点(分子多项式的根)和极点(分母多项式的根)来表征。由式(4.10)可以看出,在 $z=0$ 处有一个零点,在 $z=a$ 处有一个极点。本例的收敛域和零极点图如图 4-1 所示。在 z 变换应用中,复平面一般指 z 平面。

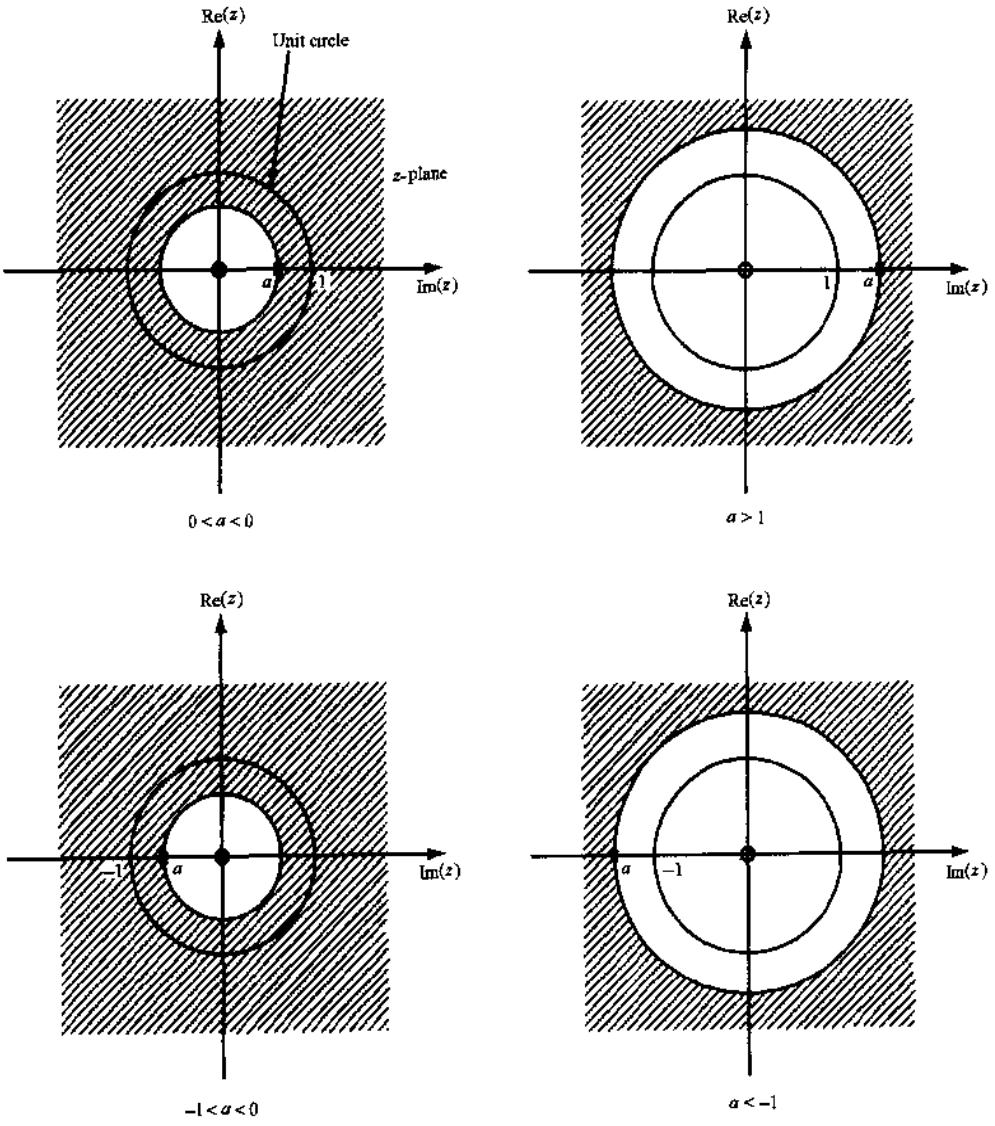


图 4-1　$|z|>|a|$形式的收敛域

例 4.2　考虑序列

$$x[n] = -a^n u[-n-1] \tag{4.11}$$

其 z 变换 $X(z)$ 为(习题 4.1)

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \quad |z| < |a| \tag{4.12}$$

与前面一样，$X(z)$ 也可以写为

$$X(z) = \frac{z}{z-a} \quad |z| < |a| \tag{4.13}$$

因此，本例的收敛域和零极点图如图 4-2 所示。比较式(4.9)和式(4.12)[或式(4.10)和式(4.13)]，可以看出，两个不同序列的 $X(z)$ 的代数表达式是完全相同的，只是其收敛域不同。因此，与拉普拉斯变换一样，指定 z 变换要求包括代数表达式和收敛域。

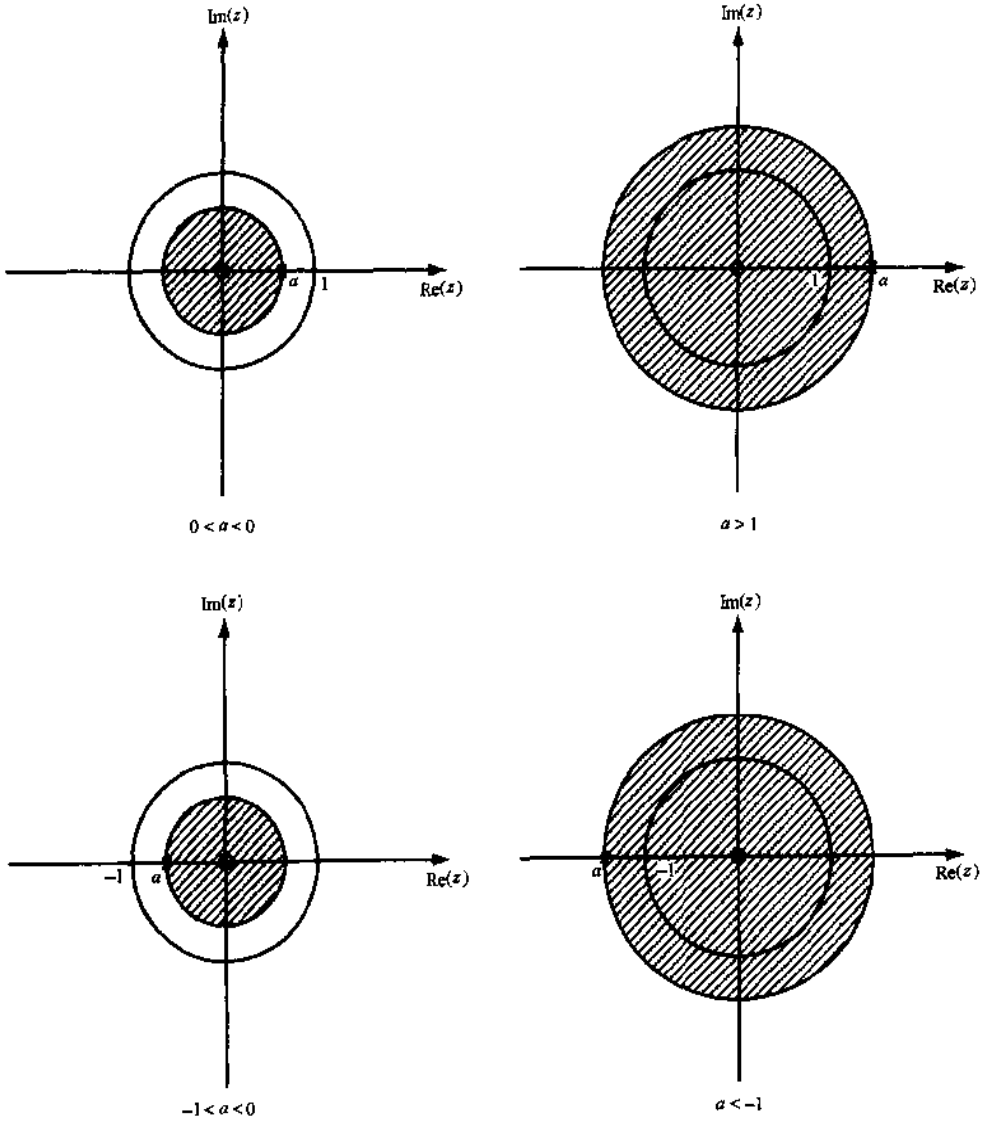


图 4-2　$|z| < |a|$ 形式的收敛域

C. 收敛域的性质

由例 4.1 和例 4.2 可知，$X(z)$ 的收敛域取决于 $x[n]$ 的特征。收敛域的性质现归纳如下，在此假设 $X(z)$ 是 z 的有理函数。

性质 1　收敛域不包含任何极点。

性质 2　如果 $x[n]$是有界信号(即在有界区间 $N_1 \leqslant n \leqslant N_2$ 之外,$x[n]=0$,其中 N_1 和 N_2 是有界的),且 $X(z)$在某些 z 值收敛,则收敛域是除 $z=0$ 或 $z=\infty$外的整个 z 平面。

性质 3　如果 $x[n]$是右边序列(即在 $n<N_1<\infty$内,$x[n]=0$),且 $X(z)$在某些 z 值收敛,则收敛域为

$$|z|>r_{\max} \quad 或 \quad \infty>|z|>r_{\max}$$

其中,$r_{\max}$等于 $X(s)$极点的最大幅度。因此,收敛域是 z 平面内圆周 $|z|=r_{\max}$的外侧,但 $z=\infty$除外。

性质 4　如果 $x[n]$是左边信号(即在 $n>N_2>-\infty$内,$x[n]=0$),且 $X(z)$在某些 z 值收敛,则收敛域为

$$|z|<r_{\min} \quad 或 \quad 0<|z|<r_{\min}$$

其中,$r_{\min}$等于 $X(s)$极点的最小幅度。因此,收敛域是 z 平面内圆周 $|z|=r_{\min}$的内侧,但 $z=0$除外。

性质 5　如果 $x[n]$是双边信号(即 $x[n]$既不是右边信号,也不是左边信号,面是无界信号),则收敛域为

$$r_1<|z|<r_2$$

其中,r_1 和 r_2 等于 $X(z)$两个极点的幅度。因此,收敛域是 z 平面内圆周 $|z|=r_1$ 和 $|z|=r_2$ 之间的圆环,但不包含任何极点。

注意,性质 1 直接来源于极点的定义,即 $X(z)$在极点是无穷大的。其他性质的证明见习题 4.2 和 4.5。

4.3　常见序列的 z 变换

A. 单位冲激序列 $\delta[n]$

由式(1.45)和(4.3),得

表 4.1　常见 z 变换对

$x[n]$	$X(z)$	收敛域
$\delta[n]$	1	所有 z
$u[n]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}},\dfrac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert>1$
$-u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}},\dfrac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert<1$
$\delta[n-m]$	z^{-m}	所有 z,但 $m>0$ 时 0 除外,$m<0$ 时∞除外
$a^n u[n]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}},\dfrac{z}{z-a}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
$-a^n u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}},\dfrac{z}{z-a}$	$\lvert z\rvert<\lvert a\rvert$
$na^n u[n]$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2},\dfrac{az}{(z-a)^2}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
$-na^n u[-n-1]$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2},\dfrac{az}{(z-a)^2}$	$\lvert z\rvert<\lvert a\rvert$
$(n+1)a^n u[n]$	$\dfrac{1}{(1-az^{-1})^2},\left[\dfrac{z}{z-a}\right]^2$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
$(\cos\Omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{z^2-(\cos\Omega_0)z}{z^2-(2\cos\Omega_0)z+1}$	$\lvert z\rvert>1$
$(\sin\Omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{(\sin\Omega_0)z}{z^2-(2\cos\Omega_0)z+1}$	$\lvert z\rvert>1$
$(r^n\cos\Omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{z^2-(r\cos\Omega_0)z}{z^2-(2r\cos\Omega_0)z+r^2}$	$\lvert z\rvert>r$
$(r^n\sin\Omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{(r\sin\Omega_0)z}{z^2-(2r\cos\Omega_0)z+r^2}$	$\lvert z\rvert>r$
$\begin{cases}a^n & 0\leqslant n\leqslant N-1\\ 0 & 其他\end{cases}$	$\dfrac{1-a^N z^{-N}}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert>0$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta[n]z^{-n}=z^{-0}=1 \quad \text{对所有 } z \tag{4.14}$$

因此,

$$\delta[n]\leftrightarrow 1 \quad \text{对所有 } z \tag{4.15}$$

B. 单位阶跃序列 $u[n]$

设式(4.8)到式(4.10)中的 $a=1$,得

$$u[n]\leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1} \quad |z|>1 \tag{4.16}$$

C. z 变换对

常见序列的 z 变换如表 4.1 所示。

4.4 z 变换的性质

下面介绍 z 变换的基本性质。这些性质的证明见习题 4.8~4.14。

A. 线性

如果

$$x_1[n]\leftrightarrow X_1(z) \quad \text{收敛域为 } R_1$$
$$x_2[n]\leftrightarrow X_2(z) \quad \text{收敛域为 } R_2$$

则

$$a_1x_1[n]+a_2x_2[n]\leftrightarrow a_1X_1(z)+a_2X_2(z) \quad R'\supset R_1\cap R_2 \tag{4.17}$$

其中,a_1 和 a_2 是任意常数。

B. 时间平移

如果

$$x[n]\leftrightarrow X(z) \quad \text{收敛域为 } R$$

则

$$x[n-n_0]\leftrightarrow z^{-n_0}X(z) \quad R'=R\cap\{0<|z|<\infty\} \tag{4.18}$$

特殊情况:

$$x[n-1]\leftrightarrow z^{-1}X(z) \quad R'=R\cap\{0<|z|\} \tag{4.19}$$
$$x[n+1]\leftrightarrow zX(z) \quad R'=R\cap\{|z|<\infty\} \tag{4.20}$$

由于这些关系[式(4.19)和(4.20)],z^{-1} 常称为单位延迟算子,z 称为单位超前算子。注意,在拉普拉斯变换中,算子 $s^{-1}=1/s$ 和 s 分别对应时域积分和微分[式(4.22)和(4.20)]。

C. 乘以 z_0^n

如果

$$x[n]\leftrightarrow X(z) \quad \text{收敛域为 } R$$

则

$$z_0^nx[n]\leftrightarrow X\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad R'=|z_0|R \tag{4.21}$$

特别地,乘以 z_0^n 后,$X(z)$ 中 $z=z_k$ 处的极点移到 $z=z_0z_k$ 处,收敛域扩大或缩减 $|z_0|$ 倍,但存在一种特殊情况:

$$e^{j\Omega_0 n}x[n]\leftrightarrow X(e^{-j\Omega_0}z) \quad R'=R \tag{4.22}$$

这种特殊情况下,所有的极点和零点都围绕角度 Ω_0 旋转,但收敛域不变。

D. 时间翻转

如果

$$x[n]\leftrightarrow X(z) \qquad \text{收敛域为 } R$$

则

$$x[-n]\leftrightarrow X\left(\frac{1}{z}\right) \qquad R'=\frac{1}{R} \tag{4.23}$$

因此，时间翻转之后，$X(z)$中 $z=z_k$ 处的极点(或零点)移到 $1/z_k$ 处。$R'=1/R$ 表示R 的翻转，说明如果时间翻转，右边序列将变成左边序列，反之亦然。

E. 乘以 n(或 z 域微分)

如果

$$x[n]\leftrightarrow X(z) \qquad \text{收敛域为 } R$$

则

$$nx[n]\leftrightarrow -z\frac{dX(z)}{dz} \qquad R'=R \tag{4.24}$$

F. 累加

如果

$$x[n]\leftrightarrow X(z) \qquad \text{收敛域为 } R$$

则

$$\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]\leftrightarrow\frac{1}{1-z^{-1}}X(z)=\frac{z}{z-1}X(z) \qquad R'\supset R\cap\{|z|>1\} \tag{4.25}$$

注意，$\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$是时域积分的离散时间形式，称为累加。对应的拉普拉斯变换积分算子是 $1/s$。

G. 卷积

如果

$$x_1[n]\leftrightarrow X_1(z) \qquad \text{收敛域为 } R_1$$
$$x_2[n]\leftrightarrow X_2(z) \qquad \text{收敛域为 } R_2$$

则

$$x_1[n]*x_2[n]\leftrightarrow X_1(z)X_2(z) \qquad R'\supset R_1\cap R_2 \tag{4.26}$$

与连续时间的模拟情况一样，此卷积性质在离散时间 LTI 系统分析和设计中极其重要。

H. 部分 z 变换性质汇总

为便于参考，以上 z 变换性质归纳在表 4.2 中。

表 4.2　z 变换的性质

性质	序列	变换	收敛域
	$x[n]$	$X(z)$	R
	$x_1[n]$	$X_1(z)$	R_1
	$x_2[n]$	$X_2(z)$	R_2
线性	$a_1x_1[n]+a_2x_2[n]$	$a_1X_1(z)+a_2X_2(z)$	$R'\supset R_1\cap R_2$
时间平移	$x[n-n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$	$R'\supset R\cap\{0<\|z\|<\infty\}$
乘以 z_0^n	$z_0^nx[n]$	$X\left(\frac{z}{z_0}\right)$	$R'=\|z_0\|R$
乘以 $e^{j\Omega_0 n}$	$e^{j\Omega_0 n}x[n]$	$X(e^{-j\Omega_0}z)$	$R'=R$
时间翻转	$x[-n]$	$X\left(\frac{1}{z}\right)$	$R'=\frac{1}{R}$
乘以 n	$nx[n]$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$	$R'=R$
累加	$\sum_{k=-\infty}^{n}x[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$	$R'\supset R\cap\{\|z\|>1\}$
卷积	$x_1[n]*x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	$R'\supset R\cap R_2$

4.5 z反变换

从z变换$X(z)$中找出序列$x[n]$的反变换称为z反变换，用符号表示为

$$x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} \tag{4.27}$$

A. 反变换公式

与拉普拉斯变换情况相同，z反变换通常用z平面上的闭合线积分来表示，即

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz \tag{4.28}$$

其中，C是一条绕原点逆时针积分的圆周线。计算式(4.28)要求掌握复变函数原理。

B. 利用z变换对表

在$X(z)$反变换的第二种方法中，将$X(z)$表示为和的形式，即

$$X(z) = X_1(z) + \cdots + X_n(z) \tag{4.29}$$

其中，$X_1(z), \cdots, X_n(z)$是一些已知其反变换为$x_1[n], \cdots, x_n[n]$的函数。根据线性性质式(4.17)，可得

$$x[n] = x_1[n] + \cdots + x_n[n] \tag{4.30}$$

C. 幂级数展开

z变换的定义式[式(4.3)]就是一个幂级数表达式，其中序列值$x[n]$是z^{-n}的系数。因此，如果$X(z)$是下列形式的幂级数

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \\ &= \cdots + x[-2]z^2 + x[-1]z + x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \cdots \end{aligned} \tag{4.31}$$

则可以通过求z^{-1}的相应幂级数的系数来确定序列的值。这种方法可能没有提供近似的解，但对于$X(z)$较复杂的有限长序列非常有用(见习题4.15)。对有理z变换而言，幂级数展开可以用长除法得到，见习题4.16和4.17。

D. 部分分式展开

与反拉普拉斯变换的情况一样，部分分式展开法是一种最有用的z反变换，尤其在$X(z)$为z的有理函数时。设

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = k\frac{(z-z_1)\cdots(z-z_m)}{(z-p_1)\cdots(z-p_n)} \tag{4.32}$$

假设$n \geqslant m$，且所有的极点p_k都是单极点，则

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z-p_1} + \frac{c_2}{z-p_2} + \cdots + \frac{c_n}{z-p_n} = \frac{c_0}{z} + \sum_{k=1}^{n}\frac{c_k}{z-p_k} \tag{4.33}$$

其中

$$c_0 = X(z)\big|_{z=0} \qquad c_k = (z-p_k)\frac{X(z)}{z}\bigg|_{z=p_k} \tag{4.34}$$

因此，得

$$X(z) = c_0 + c_1\frac{z}{z-p_1} + \cdots + c_n\frac{z}{z-p_n} = c_0 + \sum_{k=1}^{n}c_k\frac{z}{z-p_k} \tag{4.35}$$

由$X(z)$的整个收敛域以及表4.1推出式(4.35)中每一项的收敛域，然后求每一项的z反变换，则得到整个z反变换(见习题4.19～4.23)。

如果式(4.32)中的$m > n$，则必须在式(4.35)的等式右边添加一个z的多项式，其阶次为

$(m-n)$。因此对于 $m>n$，完整的部分分式展开形式为

$$X(z)=\sum_{q=0}^{m-n}b_q z^q+\sum_{k=1}^{n}c_k\frac{z}{z-p_k} \tag{4.36}$$

如果 $X(z)$是多重极点(如 p_i 是 r 重极点)，则 $X(z)/z$ 的展开式将由以下项组成：

$$\frac{\lambda_1}{z-p_i}+\frac{\lambda_2}{(z-p_i)^2}+\cdots+\frac{\lambda_r}{(z-p_i)^r} \tag{4.37}$$

其中

$$\lambda_{r-k}=\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dz^k}\left[(z-p_i)^r\frac{X(z)}{z}\right]\Big|_{z=p_i} \tag{4.38}$$

4.6　离散时间 LTI 系统的系统函数

A. *系统函数*

2.6 节曾介绍，离散时间 LTI 系统的输出 $y[n]$等于输入 $x[n]$与冲激响应 $h[n]$的卷积，即

$$y[n]=x[n]*h[n] \tag{4.39}$$

利用 z 变换的卷积性质式(4.26)，得

$$Y(z)=X(z)H(z) \tag{4.40}$$

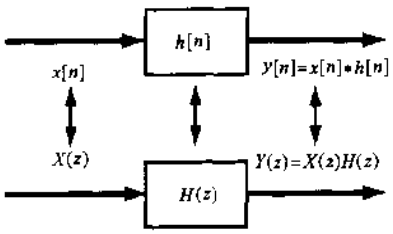


图 4-3　冲激响应与系统函数

其中，$Y(z)$、$X(z)$和 $H(z)$分别是 $y[n]$、$x[n]$和 $h[n]$的 z 变换。式(4.40)可以表示为

$$H(z)=\frac{Y(z)}{H(z)} \tag{4.41}$$

$h[n]$的 z 变换 $H(z)$就是系统的系统函数(或传递函数)。根据式(4.41)，系统函数 $H(z)$也可以定义为输出 $y[n]$和输入 $x[n]$的 z 变换之比。系统函数 $H(z)$完全可以描述系统的特征。图 4-3 显示了式(4.39)与式(4.40)之间的关系。

B. *离散时间 LTI 系统的特征*

离散时间 LTI 系统的很多性质都与 z 平面内的 $H(z)$密切相关，尤其是极点位置和收敛域。

1. 因果性

对一个因果的离散时间 LTI 系统而言，有[式(2.44)]

$$h[n]=0\quad n<0$$

因为 $h[n]$是一个右边信号，相应对 $H(z)$的要求就是 $H(z)$的收敛域必须为

$$|z|>r_{\max}$$

也就是说，$H(z)$的收敛域为 z 平面内包含 $H(z)$所有极点的圆周的外侧区域。同样道理，如果系统是逆因果的，则

$$h[n]=0\quad n\geqslant 0$$

且 $h[n]$是左边信号，且 $H(z)$的收敛域必须为

$$|z|<r_{\min}$$

也就是说，$H(z)$的收敛域为 z 平面内不包含 $H(z)$所有极点的圆周的内侧区域。

2. 稳定性

在 2.7 节曾介绍，当且仅当[式(2.49)]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|<\infty$$

时，离散时间 LTI 系统是 BIBO 稳定的。相应对 $H(z)$的要求为，$H(z)$的收敛域包含单位圆(即

$|z|=1$)(见习题4.30)。

3. 因果和稳定系统

如果系统既是因果的也是稳定的,则$H(z)$的所有极点必须位于z平面内单位圆内,因为其收敛域为$|z|>r_{max}$形式。并且,由于单位圆包含在收敛域内,必须有$r_{max}<1$。

C. 用线性常系数差分方程描述的LTI系统的系统函数

在2.9节曾考虑了输入$x[n]$和输出$y[n]$满足如下一般线性常系数差分方程的离散时间LTI系统:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \tag{4.42}$$

进行z变换,并利用z变换的时间平移性质式(4.18)和线性性质式(4.17),得

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X(z)$$

或

$$Y(z)\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} = X(z)\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} \tag{4.43}$$

则

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} \tag{4.44}$$

因此,$H(z)$总是有理函数。注意,$H(z)$的收敛域没有由式(4.44)指定,但必须由系统的其他要求推出,如因果性或稳定性。

D. 系统级联

对于两个级联的LTI系统(分别有$h_1[n]$和$h_2[n]$),其冲激响应$h[n]$为

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n] \tag{4.45}$$

因此,相应的系统函数为乘积关系

$$H(z) = H_1(z)H_2(z) \qquad R \supset R_1 \cap R_2 \tag{4.46}$$

同样道理,两个LTI系统并联的冲激响应为

$$h[n] = h_1(t) + h_2[n] \tag{4.47}$$

则

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z) \qquad R \supset R_1 \cap R_2 \tag{4.48}$$

4.7 单边z变换

A. 定义

序列$x[n]$的单边z变换$X_I(z)$可以定义为[式(4.5)]

$$X_I(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \tag{4.49}$$

单边z变换不同于双边z变换,单边z变换中的和只包括$n\geqslant 0$的部分。因此,$x[n]$的单边z变换可以认为是$x[n]u[n]$的双边z变换。由于$x[n]u[n]$是右边序列,则$X_I(z)$的收敛域总是在z平面中一个圆周的外侧。

B. 基本性质

单边z变换的大多数性质与双边z变换相同。如果一个用线性常系数差分方程描述的因

果系统有非零初始条件,则常用单边 z 变换来计算系统对因果输入的响应。在这种应用中,单边 z 变换有用的基本性质是下面的时间平移性质,它不同与双边 z 变换的时间平移性质。

时间平移:

如果 $x[n]\leftrightarrow X_I(z)$,则对于 $m\geqslant 0$,

$$x[n-m]\leftrightarrow z^{-m}X_I(z)+z^{-m+1}x[-1]+z^{-m+2}x[-2]+\cdots+x[-m] \tag{4.50}$$

$$x[n+m]\leftrightarrow z^{m}X_I(z)-z^{m}x[0]-z^{m-1}x[1]-\cdots-zx[m-1] \tag{4.51}$$

式(4.50)和(4.51)的证明在习题 4.36 中给出。

C. *系统函数*

与连续时间 LTI 系统的情况类似,对于单边 z 变换,系统函数 $H(z)=Y(z)/X(z)$ 是在一定条件下定义的,这个条件就是 LTI 系统是松弛的,即所有的初始条件为 0。

习 题 解 答

z 变换

4.1 求出下列序列的 z 变换:

(a)$x[n]=-a^{n}u[-n-1]$

(b)$x[n]=a^{-n}u[-n-1]$

[redacted] (a)由式(4.3)

$$X(z)=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}a^{n}u[-n-1]z^{-n}=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}a^{n}z^{-n}$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}(a^{-1}z)^{n}=1-\sum_{n=0}^{\infty}(a^{-1}z)^{n}$$

由式(1.91),如果 $|a^{-1}z|<1$ 或 $|z|<|a|$,则

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a^{-1}z)^{n}=\frac{1}{1-a^{-1}z}$$

因此,

$$X(z)=1-\frac{1}{1-a^{-1}z}=\frac{-a^{-1}z}{1-a^{-1}z}=\frac{z}{z-a}=\frac{1}{1-az^{-1}}\qquad |z|<|a| \tag{4.52}$$

(b)同样道理

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a^{-n}u[-n-1]z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}(az)^{-n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(az)^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}(az)^{n}-1$$

由式(1.91),如果 $|az|<1$ 或 $|z|<\frac{1}{|a|}$,则

$$\sum_{n=0}^{\infty}(az)^{n}=\frac{1}{1-az}$$

因此,得

$$X(z)=\frac{1}{1-az}-1=\frac{az}{1-az}=-\frac{z}{z-1/a}\qquad |z|<\frac{1}{|a|} \tag{4.53}$$

4.2 一个有界序列 $x[n]$ 定义为

$$x[n]\begin{cases}\neq 0 & N_1\leqslant n\leqslant N_2\\ =0 & \text{其他}\end{cases}$$

其中,N_1 和 N_2 为有界值。证明:$X(z)$ 的收敛域是除 $z=0$ 或 $z=\infty$ 外的整个 z 平面。

[redacted] 由式(4.3)

$$X(z)=\sum_{n=N_1}^{N_2}x[n]z^{-n} \tag{4.54}$$

如果 z 不等于0或无穷大，则式(4.54)中的每一项都是有界的，因此 $X(z)$ 收敛。如果 $N_1<0$ 或 $N_2>0$，则式(4.54)既包含 z 的正幂项又包含 z 的负幂项。当 $|z|\to 0$ 时，z 的负幂项变成无界的，当 $|z|\to\infty$ 时，z 的正幂项变成无界的。因此，$X(z)$ 的收敛域是除 $z=0$ 或 $z=\infty$ 外的整个 z 平面。如果 $N_1\geqslant 0$，式(4.54)只包含 z 的负幂项，则 $X(z)$ 的收敛域包含 $z=\infty$。如果 $N_2\leqslant 0$，式(4.54)只包含 z 的正幂项，则 $X(z)$ 的收敛域包含 $z=0$。

4.3 一个有界序列 $x[n]$ 定义为

$$x[n]=\{5,3,-2,0,4,-3\}\quad(\uparrow\text{ 在 }-2\text{ 处})$$

求出 $X(z)$ 及其收敛域。

解 由式(4.3)和给定的 $x[n]$，得

$$\begin{aligned}X(z)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}=\sum_{n=-2}^{3}x[n]z^{-n}\\&=x[-2]z^2+x[-1]z+x[0]+x[1]z^{-1}+x[2]z^{-2}+x[3]z^{-3}\\&=5z^2+3z-2+4z^{-2}-3z^{-3}\end{aligned}$$

如果 z 不等于0或无穷大，则 $X(z)$ 中的每一项都是有界的，因此 $X(z)$ 收敛。注意，$X(z)$ 既包含 z 的正指数项又包含 z 的负指数项。因此，由习题4.2的结果可得，$X(z)$ 的收敛域是 $0<|z|<\infty$。

4.4 考虑序列

$$x[n]=\begin{cases}a^n & 0\leqslant n\leqslant N-1,\ a>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

求出 $X(z)$，并画出 $X(z)$ 的零极点。

解 由式(4.33)，并利用式(1.90)，得

$$X(z)=\sum_{n=0}^{N-1}a^nz^{-n}=\sum_{n=0}^{N-1}(az^{-1})^n=\frac{1-(az^{-1})^N}{1-az^{-1}}=\frac{1}{z^{N-1}}\frac{z^N-a^N}{z-a}\tag{4.55}$$

从式(4.55)可以看出，在 $z=0$ 处有一个 $(N-1)$ 阶的极点，并且在 $z=a$ 处还有一个极点。因为 $x[n]$ 是一个有界序列，且在 $n<0$ 时为0，则 $X(z)$ 的收敛域为 $|z|>0$。分子多项式的 N 个根为

$$z_k=ae^{j(2\pi k/N)}\qquad k=0,1,\cdots,N-1\tag{4.56}$$

在 $k=0$ 处的根抵消了在 $z=a$ 处的极点，剩下的 $X(z)$ 零点为

$$z_k=ae^{j(2\pi k/N)}\qquad k=1,\cdots,N-1\tag{4.57}$$

$N=8$ 时的零极点图如图4-4所示。

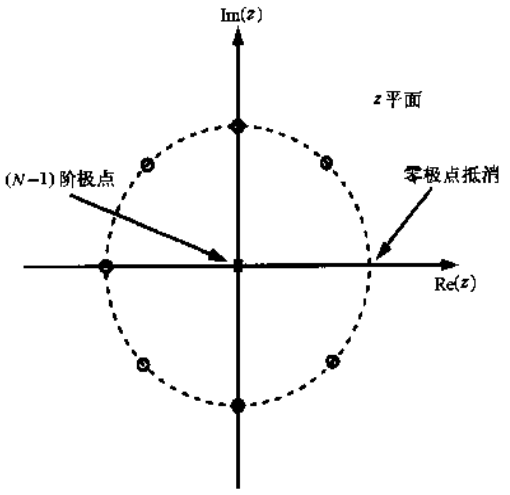


图4-4 $N=8$ 时的零极点图

4.5 证明：如果 $x[n]$ 是右边序列，$X(z)$ 在某些 z 值下收敛，则 $X(z)$ 的收敛域为

$$|z|>r_{\max}\quad\text{或}\quad\infty>|z|>r_{\max}$$

其中 $r_{\max}$ 是 $X(z)$ 极点的最大幅度。

解　因为 $x[n]$是右边序列，则

$$x[n]=0 \qquad n<N_1$$

且 $X(z)$在$|z|=r_0$ 处收敛，则由式(4.3)

$$|X(z)|\leqslant\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|r_0^{-n}=\sum_{n=N_1}^{\infty}|x[n]|r_0^{-n}<\infty$$

现在，如果 $r_1>r_0$，则

$$\sum_{n=N_1}^{\infty}|x[n]|r_1^{-n}=\sum_{n=N}^{\infty}|x[n]|\left(r_0\frac{r_1}{r_0}\right)^{-n}=\sum_{n=N_1}^{\infty}|x[n]|r_0^{-n}\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{-n}$$

$$\leqslant\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{-N_1}\sum_{n=N_1}^{\infty}|x[n]|r_0^{-n}<\infty$$

因为$(r_1/r_0)^{-n}$是衰减序列，因此 $X(z)$在 $r=r_1$ 处收敛，且 $X(z)$的收敛域为

$$|z|>r_0$$

因为 $X(z)$的收敛域不能包含极点，则可以得到 $X(z)$的收敛域为

$$|z|>r_{\max}$$

其中 $r_{\max}$是 $X(z)$极点的最大幅度。

如果 $N_1<0$，则

$$|X(z)=\sum_{n=N_1}^{\infty}x[n]z^{-n}=x[N_1]z^{-N_1}+\cdots+x[-1]z+\sum_{n=0}^{\infty}|x[n]|z^{-n}$$

即 $X(z)$包含 z 的正幂，且在 $z=\infty$处无界。在这种情况下，$X(z)$的收敛域为

$$\infty>|z|>r_{\max}$$

由以上结果可知，如果 $X(z)$的收敛域包含 $z=\infty$，则序列 $x[n]$是因果的。注意，这与拉普拉斯变换的情况不同。

4.6　求出下列序列的 z 变换$X(z)$，画出零极点图和收敛域：

(a)$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]+\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$

(b)$x[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]+\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$

(c)$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]+\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]$

解　(a)由表 4.1

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\leftrightarrow\frac{z}{z-\frac{1}{2}} \qquad |z|>\frac{1}{2} \tag{4.58}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]\leftrightarrow\frac{z}{z-\frac{1}{3}} \qquad |z|>\frac{1}{3} \tag{4.59}$$

可以看出，式(4.58)和(4.59)的收敛域重叠，因此

$$X(z)=\frac{z}{z-\frac{1}{2}}+\frac{z}{z-\frac{1}{3}}=\frac{2z\left(z-\frac{5}{12}\right)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)} \qquad |z|>\frac{1}{2} \tag{4.60}$$

由式(4.60)可以看出，$X(z)$在 $z=0$ 和 $z=\frac{5}{12}$处有两个零点，在 $z=\frac{1}{2}$和 $z=\frac{1}{3}$处有两个极点，收敛域为 $|z|>\frac{1}{2}$，如图 4-5(a)所示。

(b)由表 4.1

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]\leftrightarrow\frac{z}{z-\frac{1}{3}} \qquad |z|>\frac{1}{3} \tag{4.61}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]\leftrightarrow\frac{z}{z-\frac{1}{2}} \qquad |z|<\frac{1}{2} \tag{4.62}$$

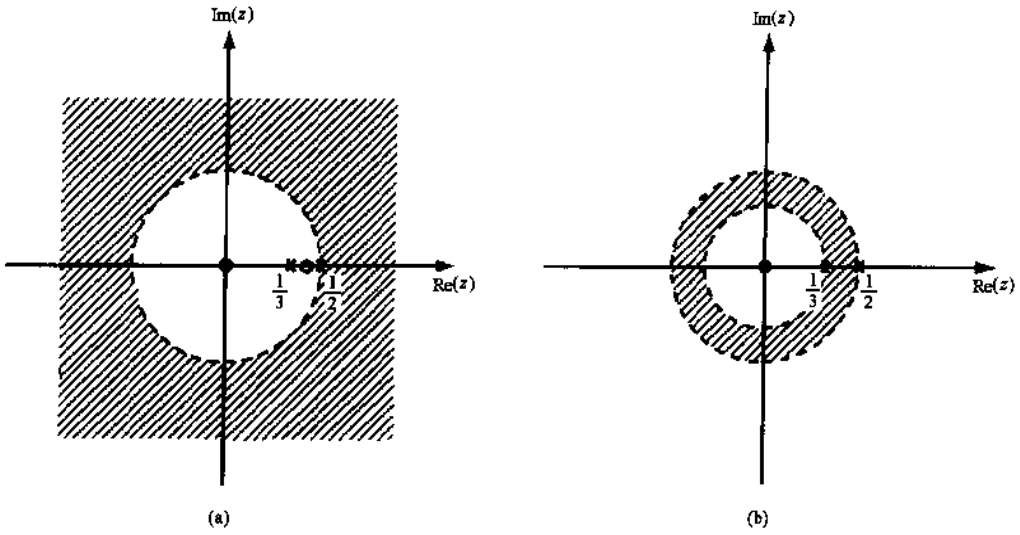


图 4-5

可以看出,式(4.61)和(4.62)的收敛域重叠,因此

$$X(z)=\frac{z}{z-\frac{1}{3}}-\frac{z}{z-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{6}\frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)}\qquad \frac{1}{3}<|z|<\frac{1}{2} \tag{4.63}$$

由式(4.63)可以看出,$X(z)$在$z=0$处有一个零点,在$z=\frac{1}{2}$和$z=\frac{1}{3}$处有两个极点,收敛域为$\frac{1}{3}<|z|<\frac{1}{2}$,如图4-5(b)所示。

(c)由表4.1

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\leftrightarrow\frac{z}{z-\frac{1}{2}}\qquad |z|>\frac{1}{2} \tag{4.64}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n u[-n-1]\leftrightarrow\frac{z}{z-\frac{1}{3}}\qquad |z|<\frac{1}{3} \tag{4.65}$$

可以看出,式(4.64)和(4.65)的收敛域没有重叠,没有公共的收敛域。因此,$x[n]$没有$X(z)$。

4.7 设

$$x[n]=a^{|n|}\qquad a>0 \tag{4.66}$$

(a)画出$a<1$和$a>1$时的$x[n]$。

(b)求出$X(s)$,画出零极点图以及$a<1$和$a>1$时的收敛域。

[redacted] (a)$a<1$和$a>1$时的序列$[n]$如图4-6(a)和(b)所示。

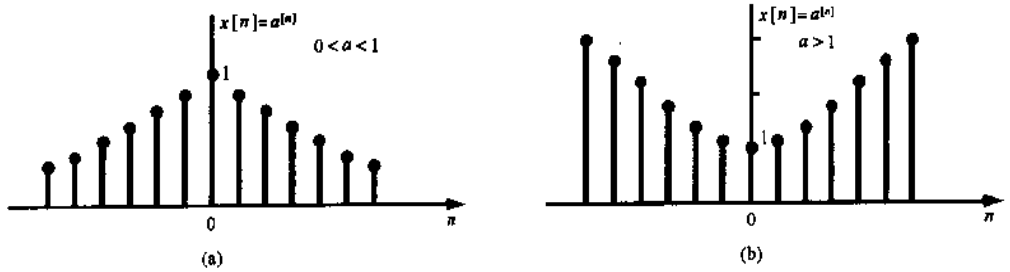


图 4-6

(b)因为$x[n]$是双边信号,可以表示为

$$x[n]=a^n u[n]+a^{-n}u[-n-1] \tag{4.67}$$

由表4.1

$$a^n u[n]\leftrightarrow\frac{z}{z-a}\qquad |z|>a \tag{4.68}$$

$$a^{-n}u[-n-1]\leftrightarrow -\frac{z}{z-1/a} \qquad |z|<\frac{1}{a} \tag{4.69}$$

如果 $a<1$，可以看出，式(4.68)和(4.69)的收敛域重叠，因此

$$X(z)=\frac{z}{z-a}-\frac{z}{z-1/a}=\frac{a^2-1}{a}\frac{z}{(z-a)(z-1/a)} \qquad -a<|z|<\frac{1}{a} \tag{4.70}$$

由式(4.70)可以看出，$X(z)$在原点没有零点，在 $z=a$ 和 $z=1/a$ 处有两个极点，收敛域为 $-a<|z|<1/a$，如图 4-7 所示。如果 $a>1$，可以看出，式(4.68)和(4.69)的收敛域不重叠，没有公共的收敛域。因此，$x[n]$没有 $X(z)$。

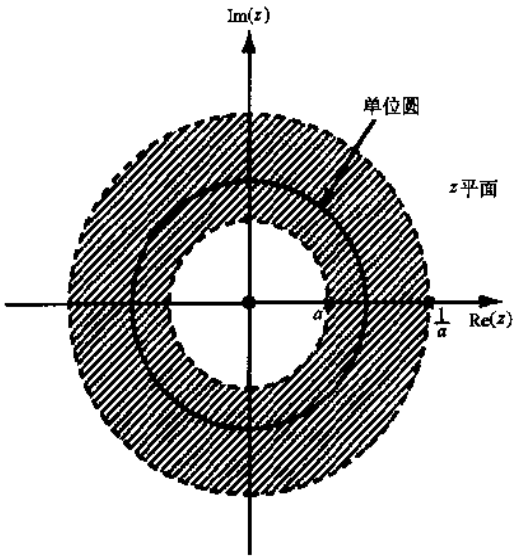


图 4-7

z 变换的性质

4.8 验证时间平移性质式(4.18)，即

$$x[n-n_0]\leftrightarrow z^{-n_0}X(z) \qquad R'\supset R\cap\{0<|z|<\infty\}$$

[redacted] 由定义式(4.3)

$$\mathscr{Z}\{x[n-n_0]\}=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n-n_0]z^{-n}$$

改变变量 $m=n-n_0$，得

$$\mathscr{Z}\{x[n-n_0]\}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]z^{-(m+n_0)}$$

$$=z^{-n_0}\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]z^{-m}=z^{-n_0}X(z)$$

因为乘以 z^{-n_0}，当 $n_0>0$ 时将额外引入 $z=0$ 点的极点，删除 $z=\infty$ 点的极点。同样，如果 $n_0<0$，将额外引入 $z=0$ 点的零点，删除 $z=\infty$ 点的零点。因此，$z=0$ 和 $z=\infty$ 点可能会由于时间平移而从收敛域中添加或删除。这样，有

$$x[n-n_0]\leftrightarrow z^{-n_0}X(z) \qquad R'\supset R\cap\{0<|z|<\infty\}$$

其中，R 和 R' 是时间平移操作之前和之后的收敛域。

4.9 验证式(4.21)，即

$$z_0^n x[n]\leftrightarrow X\left(\frac{z}{z_0}\right) \qquad R'=|z_0|R$$

[redacted] 由定义式(4.3)

$$\mathscr{Z}\{z_0^n x[n]\}\leftrightarrow\sum_{n=-\infty}^{\infty}(z_0^n x[n])z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\left(\frac{z}{z_0}\right)^{-n}=X\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

$X(z)$中 $z=z_k$ 点的极点(或零点)移到了 $z=z_0z_k$ 点，收敛域扩展或压缩了 $|z_0|$ 倍。因此，有

$$z_0^n x[n]\leftrightarrow X\left(\frac{z}{z_0}\right) \qquad R'=|z_0|R$$

4.10 求出下列序列的 z 变换及其相关的收敛域：

(a)$x[n]=\delta[n-n_0]$

(b)$x[n]=u[n-n_0]$

(c)$x[n]=a^{n+1}u[n+1]$

(d)$x[n]=u[-n]$

(e)$x[n]=a^{-n}u[-n]$，a、b 为实常数

[redacted] (a)由式(4.15)

$$\delta[n]\leftrightarrow 1 \qquad \text{对所有 } z$$

利用时间平移性质式(4.18)，得

$$\delta[n-n_0]\leftrightarrow z^{-n_0} \qquad \begin{matrix}0<|z|, n_0>0\\ |z|<\infty, n_0<0\end{matrix} \tag{4.71}$$

(b)由式(4.16)

$$u[n]\leftrightarrow \frac{z}{z-1} \qquad |z|>1$$

利用时间平移性质式(4.18)，得

$$u[n-n_0]\leftrightarrow z^{-n_0}\frac{z}{z-1}=\frac{z^{-(n_0-1)}}{z-1} \qquad 1<|z|<\infty \tag{4.72}$$

(c)由式(4.8)和(4.10)

$$a^n u[n]\leftrightarrow \frac{z}{z-a} \qquad |z|>|a|$$

由式(4.20)，得

$$a^{n+1}u[n+1]\leftrightarrow z\frac{z}{z-a}=\frac{z^2}{z-a} \qquad |a|<|z|<\infty \tag{4.73}$$

(d)由式(4.16)

$$u[n]\leftrightarrow \frac{z}{z-1} \qquad |z|>1$$

由时间翻转性质式(4.23)，得

$$u[-n]\leftrightarrow \frac{1/z}{1/z-1}=\frac{1}{1-z} \qquad |z|<1 \tag{4.74}$$

(e)由式(4.8)和(4.10)

$$a^n u[n]\leftrightarrow \frac{z}{z-a} \qquad |z|>|a|$$

由时间翻转性质式(4.23)，得

$$a^{-n}u[-n]\leftrightarrow \frac{1/z}{1/z-a}=\frac{1}{1-az} \qquad |z|<\frac{1}{|a|} \tag{4.75}$$

4.11 验证乘以 n(或 z 域微分)性质式(4.24)，即

$$nx[n]\leftrightarrow -z\frac{dX(z)}{dz} \qquad R'=R$$

[redacted] 由定义式(4.3)

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}$$

上式两端对 z 微分，得

$$\frac{dX(z)}{dz}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}-nx[n]z^{-n-1}$$

且

$$-z\frac{dX(z)}{dz}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\{nx[n]\}z^{-n}=\mathcal{Z}\{nx[n]\}$$

因此，得

$$nx[n]\leftrightarrow -z\frac{dX(z)}{dz} \qquad R'=R$$

4.12 求出下列序列的 z 变换：

(a)$x[n]=na^nu[n]$

(b)$x[n]=na^{n-1}u[n]$

[redacted] (a)由式(4.8)和(4.10)

$$a^nu[n]\leftrightarrow\frac{z}{z-a}\qquad |z|>|a| \tag{4.76}$$

利用乘以 n 性质(4.24)，得

$$na^nu[n]\leftrightarrow -z\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-a}\right)=\frac{az}{(z-a)^2}\qquad |z|>|a| \tag{4.77}$$

(b)对式(4.76)求 a 的微分，得

$$na^{n-1}u[n]\leftrightarrow\frac{d}{da}\left(\frac{z}{z-a}\right)=\frac{z}{(z-a)^2}\qquad |z|>|a| \tag{4.78}$$

注意，对式(4.77)两端除以 a，可以得到式(4.78)。

4.13 验证卷积性质式(4.26)，即

$$x_1[n]*x_2[n]\leftrightarrow X_1(z)X_2(z)\qquad R'\supset R_1\cap R_2$$

[redacted] 由定义式(2.35)

$$y[n]=x_1[n]*x_2[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_1[k]x_2[n-k]$$

则由定义式(4.3)

$$Y(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_1[k]x_2[n-k]\right)z^{-n}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_1[k]\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_2[n-k]z^{-n}\right)$$

注意，后一个表达式中括号内的项是平移后序列 $x_2[n-k]$ 的 z 变换，则由时间平移性质式(4.18)，得

$$Y(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k][z^{-k}X_2(z)]=\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]z^{-k}\right)X_2(z)=X_1(z)X_2(z)$$

其收敛域包含 $X_1(z)$ 和 $X_2(z)$ 收敛域的交集。如果一个变换的零点可以抵消另一个变换的极点，则 $Y(z)$ 的收敛域会更大一些。因此，得

$$x_1[n]*x_2[n]\leftrightarrow X_1(z)X_2(z)\qquad R'\supset R_1\cap R_2$$

4.14 验证累加性质式(4.25)，即

$$\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]\leftrightarrow\frac{1}{1-z^{-1}}X(z)=\frac{z}{z-1}X(z)\qquad R'\supset R\cap\{|z|>1\}$$

[redacted] 由定义式(2.40)

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]=x[n]*u[n]$$

则，利用式(4.16)和卷积性质式(4.26)，得

$$Y(z)=X(z)\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right)=X(z)\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

其收敛域包含 $X(z)$ 与 $u[n]$ z 变换的收敛域的交集，因此，

$$\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]\leftrightarrow\frac{1}{1-z^{-1}}X(z)=\frac{z}{z-1}X(z)\qquad R'\supset R\cap\{|z|>1\}$$

z 反变换

4.15 求出下面 $X(z)$ 的反拉普拉斯变换：

$$X(z)=z^2\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)(1-z^{-1})(1+2z^{-1}),0<|z|<\infty \tag{4.79}$$

[redacted] 展开式(4.79)，得

$$X(z)=z^2+\frac{1}{2}z-\frac{5}{2}+z^{-1}$$

则，由定义式(4.3)

$$X(z)=x[-2]z^2+x[-1]z+x[0]+x[1]z^{-1}$$

得

$$x[n] = \{\cdots, 0, 1, \frac{1}{2}, -\frac{5}{2}, 1, 0, \cdots\}$$

4.16 利用幂级数展开技术,求出下列 $X(z)$的 z 反变换:

(a)$X(z) = \dfrac{1}{1-az^{-1}}, |z| > |a|$

(b)$X(z) = \dfrac{1}{1-az^{-1}}, |z| < |a|$

解 (a)因为收敛域是$|z| > |a|$(即圆周的外侧),则 $x[n]$是右边序列。因此,必须做除法,以得到 z^{-1}的级数。进行长除,得

$$\begin{array}{r} 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + \cdots \\ 1 - az^{-1} \overline{)\ z} \\ \underline{1 - az^{-1}} \\ az^{-1} \\ \underline{az^{-1} - a^2z^{-2}} \\ a^2z^{-2} \\ \vdots \end{array}$$

因此,

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + \cdots + a^kz^{-k} + \cdots$$

由定义式(4.3),得

$$x[n] = 0 \quad n < 0$$
$$x[0] = 1 \quad x[1] = a \quad x[2] = a^2 \quad \cdots \quad x[k] = a^k \quad \cdots$$

因此,得

$$x[n] = a^nu[n]$$

(b)因为收敛域是$|z| < |a|$(即圆周的内侧),则 $x[n]$是左边序列。因此,必须做除法,以得到 z 的级数。对 $X(z)$的分子和分母同时乘以 z,得

$$X[z] = \frac{z}{z-a}$$

进行长除,得

$$\begin{array}{r} -a^{-1}z - a^{-2}z^2 - a^{-3}z^3 + \cdots \\ -a + z \overline{)\ z} \\ \underline{z - a^{-1}z^2} \\ a^{-1}z^2 \\ \underline{a^{-1}z^2 - a^{-2}z^3} \\ a^{-2}z^3 \\ \vdots \end{array}$$

因此,

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} = -a^{-1}z + a^{-2}z^2 - a^{-3}z^3 - \cdots - a^{-k}z^k - \cdots$$

由定义式(4.3)得

$$x[n] = 0 \quad n \geqslant 0$$
$$x[-1] = -a^{-1} \quad x[-2] = -a^{-2} \quad x[-3] = -a^{-3} \quad \cdots \quad x[-k] = -a^{-k} \quad \cdots$$

因此,得

$$x[n] = -a^nu[-n-1]$$

4.17 找出下列 $X(z)$的 z 反变换:

(a)$X(z) = \log\left(\dfrac{1}{1-az^{-1}}\right), |z| > |a|$

(b)$X(z) = \log\left(\dfrac{1}{1-a^{-1}z}\right), |z| < |a|$

解 (a)$\log(1-r)$的幂级数展开为

$$\log(1-r) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}r^n \qquad |r| < 1 \tag{4.80}$$

现在

$$X(z) = \log\left(\frac{1}{1-az^{-1}}\right) = -\log(1-az^{-1}) \qquad |z| > |a|$$

因为收敛域是$|z|>|a|$(即$|az^{-1}|<1$),则由式(4.80),$X(z)$的幂级数展开式为

$$X(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(az^{-1})^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}a^nz^{-n}$$

由此可得$x[n]$为

$$x[n]=\begin{cases}(1/n)a^n & n\geqslant 1\\ 0 & n\leqslant 0\end{cases}$$

或

$$x[n]=\frac{1}{n}a^nu[n-1] \tag{4.81}$$

(b)

$$X(z)=\log\left(\frac{1}{1-a^{-1}z}\right)=-\log(1-a^{-1}z)\qquad |z|<|a|$$

因为收敛域是$|z|<|a|$(即$|a^{-1}z|<1$),则由式(4.81),$X(z)$的幂级数展开式为

$$X(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a^{-1}z)^n=\sum_{n=-1}^{-\infty}-\frac{1}{n}(a^{-1}z)^{-n}=\sum_{n=-1}^{-\infty}-\frac{1}{n}a^nz^{-n}$$

由此可得$x[n]$为

$$x[n]=\begin{cases}0 & n\geqslant 0\\ (1/n)a^n & n\leqslant -1\end{cases}$$

或

$$x[n]=-\frac{1}{n}a^nu[-n-1] \tag{4.82}$$

4.18 利用幂级数展开技术,求出下面$X(z)$的z反变换:

(a)$X(z)=\dfrac{z}{2z^2-3z+1}$, $|z|<\dfrac{1}{2}$

(b)$X(z)=\dfrac{z}{2z^2-3z+1}$, $|z|>1$

[redacted] (a)因为收敛域是$|z|<\frac{1}{2}$,则$x[n]$是左边序列。因此,必须做除法,以得到z的级数。进行长除,得

$$\begin{array}{r}z+3z^2+7z^3+15z^4+\cdots\\ \hline 1-3z+2z^2\big)\,z\\ z-3z^2+2z^3\\ \hline 3z^2-2z^3\\ 3z^2-9z^3+6z^4\\ \hline 7z^3-6z^4\\ 7z^3-21z^4+14z^5\\ \hline 15z^4\cdots\end{array}$$

因此,

$$X(z)=\cdots+15z^4+7z^3+3z^2+z$$

由定义式(4.3),得

$$x[n]=\{\cdots,15,7,3,1,0\}$$

(b)因为收敛域是$|z|>1$,则$x[n]$是右边序列。因此,必须做除法,以得到z^{-1}的级数:

$$\begin{array}{r}\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{3}{4}z^{-2}+\frac{7}{8}z^{-3}+\cdots\\ \hline 2z^2-3z+1\big)\,z\\ z-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}z^{-1}\\ \hline \frac{3}{2}-\frac{1}{2}z^{-1}\\ \frac{3}{2}-\frac{9}{4}z^{-1}+\frac{3}{4}z^{-2}\\ \hline \frac{7}{4}z^{-1}-\frac{4}{3}z^{-2}\\ \vdots\end{array}$$

因此,

$$X(z)=\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{3}{4}z^{-2}+\frac{7}{8}z^{-3}+\cdots$$

由定义式(4.3),得

$$x[n]=\{0,\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{7}{8},\cdots\}$$

4.19 利用部分分式展开法,重做习题4.18。

(a) $$X(z)=\frac{z}{2z^2-3z+1}=\frac{z}{2(z-1)\left(z-\frac{1}{2}\right)} \qquad |z|<\frac{1}{2}$$

利用部分分式展开法,得

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{1}{2z^2-3z+1}=\frac{1}{2(z-1)\left(z-\frac{1}{2}\right)}=\frac{c_1}{z-1}+\frac{c_2}{z-\frac{1}{2}}$$

其中

$$c_1=\left.\frac{1}{2\left(z-\frac{1}{2}\right)}\right|_{z=1}=1 \qquad c_2=\left.\frac{1}{2(z-1)}\right|_{z=1/2}=-1$$

则得

$$X(z)=\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-\frac{1}{2}} \qquad |z|<\frac{1}{2}$$

因为收敛域是$|z|<\frac{1}{2}$,则$x[n]$是左边序列。由表4.1得

$$x[n]=-u[-n-1]+\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n-1\right]u[-n-1]$$

即

$$x[n]=\{\cdots,15,7,3,1,\underset{\uparrow}{0}\}$$

(b) $$X(z)=\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-\frac{1}{2}} \qquad |z|>\frac{1}{2}$$

因为收敛域是$|z|>1$,则$x[n]$是右边序列。由表4.1得

$$x[n]=u[n]-\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]=\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]u[n]$$

即

$$x[n]=\{0,\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{7}{8},\cdots\}$$

4.20 求出下面$X(z)$的z反变换:

$$X(z)=\frac{z}{z(z-1)(z-2)^2}, \quad |z|>2$$

利用部分分式展开法,得

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{1}{(z-1)(z-2)^2}=\frac{c_1}{z-1}+\frac{\lambda_1}{z-2}+\frac{\lambda_2}{(z-2)^2} \tag{4.83}$$

其中

$$c_1=\left.\frac{1}{(z-2)^2}\right|_{z=1}=1 \qquad \lambda_2=\left.\frac{1}{z-1}\right|_{z=2}=1$$

将这些值代入式(4.83),得

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)^2}=\frac{1}{z-1}+\frac{\lambda_1}{z-2}+\frac{1}{(z-2)^2}$$

设上式中的$z=0$,得

$$-\frac{1}{4}=-1-\frac{\lambda_1}{2}+\frac{1}{4} \rightarrow \lambda_1=-1$$

因此,

$$X(z)=\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-2}+\frac{z}{(z-2)^2} \qquad |z|>2$$

因为收敛域是$|z|>2$,则$x[n]$是右边序列。由表4.1得

$$x[n] = (1 - 2^n + n2^{n-1})u[n]$$

4.21 求出下面 $X(z)$的 z 反变换：

$$X(z) = \frac{2z^3 - 5z^2 + z + 3}{(z-1)(z-2)} \qquad |z| < 1$$

[redacted]

$$X(z) = \frac{2z^3 - 5z^2 + z + 3}{(z-1)(z-2)} = \frac{2z^3 - 5z^2 + z + 3}{z^2 - 3z + 2}$$

注意，$X(z)$是假有理函数，因此进行长除，得

$$X(z) = 2z + 1 + \frac{1}{z^2 - 3z + 2} = 2z + 1 + \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

设

$$X_1(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

则

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{z(z-1)(z-2)} = \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z-1} + \frac{c_3}{z-2}$$

其中

$$c_1 = \frac{1}{(z-1)(z-2)}\bigg|_{z=0} = \frac{1}{2} \qquad c_2 = \frac{1}{z(z-2)}\bigg|_{z=1} = -1$$

$$c_3 = \frac{1}{z(z-1)}\bigg|_{z=2} = \frac{1}{2}$$

因此，

$$X_1(z) = \frac{1}{2} - \frac{z}{z-1} + \frac{1}{2}\frac{z}{z-2}$$

且

$$X(z) = 2z + \frac{3}{2} - \frac{z}{z-1} + \frac{1}{2}\frac{z}{z-2} \qquad |z| < 1$$

因为收敛域是$|z|<1$，则 $x[n]$是左边序列。由表 4.1 得

$$x[n] = 2\delta[n+1] + \frac{3}{2}\delta[n] + u[-n-1] - \frac{1}{2}2^n u[-n-1]$$

$$= 2\delta[n+1] + \frac{3}{2}\delta[n] + (1 - 2^{n-1})u[-n-1]$$

4.22 求出下面 $X(z)$的 z 反变换：

$$X(z) = \frac{3}{z-2} \qquad |z| > 2$$

[redacted] $X(z)$可以改写为

$$X(z) = \frac{3}{z-2} = 3z^{-1}\left(\frac{z}{z-2}\right) \qquad |z| > 2$$

因为收敛域是$|z|>2$，则 $x[n]$是右边序列。由表 4.1 得

$$2^n u[n] \leftrightarrow \frac{z}{z-2}$$

利用时间平移性质式(4.18)，得

$$2^{n-1}u[n-1] \leftrightarrow z^{-1}\left(\frac{z}{z-2}\right) = \frac{1}{z-2}$$

因此，得

$$x[n] = 3(2)^{n-1}u[n-1]$$

4.23 求出下面 $X(z)$的 z 反变换：

$$X(z) = \frac{2 + z^{-2} + 3z^{-4}}{z^2 + 4z + 3} \qquad |z| > 0$$

[redacted] 可以看出，$X(z)$可以改写为

$$X(z) = (2z^{-1} + z^{-3} + 3z^{-5})X_1(z)$$

其中

$$X_1(z) = \frac{z}{z^2 + 4z + 3}$$

即如果

$$x_1[n] \leftrightarrow X_1(z)$$

则利用线性和时不变性质式(4.17)和(4.18),可得到

$$x[n] = 2x_1[n-1] + x_1[n-3] + 3x_1[n-5] \tag{4.84}$$

现在

$$\frac{X_1(z)}{z} = \frac{1}{z^2+4z-3} = \frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{c_1}{z+1} + \frac{c_2}{z+3}$$

其中

$$c_1 = \frac{1}{z+3}\bigg|_{z=-1} = \frac{1}{2} \qquad c_2 = \frac{1}{z+1}\bigg|_{z=-3} = -\frac{1}{2}$$

则

$$X_1(z) = \frac{1}{2}\frac{z}{z+1} - \frac{1}{2}\frac{z}{z+3} \qquad |z|>0$$

因为收敛域是$|z|>0$,则$x[n]$是右边序列。由表4.1得

$$x_1[n] = \frac{1}{2}[(-1)^n - (-3)^n]u[n]$$

因此,由式(4.84),得

$$x[n] = [(-1)^{n-1} - (-3)^{n-1}]u[n-1] + \frac{1}{2}[(-1)^{n-3} - (-3)^{n-3}]u[n-3]$$

$$+ \frac{3}{2}[(-1)^{n-5} - (-3)^{n-5}]u[n-5]$$

4.24 求出下面$X(z)$的z反变换:

$$X(z) = \frac{1}{(1-az^{-1})^2} \qquad |z|>|a|$$

[redacted] $$X(z) = \frac{1}{(1-az^{-1})^2} = \frac{z^2}{(z-a)^2} \qquad |z|>|a| \tag{4.85}$$

由式(4.78)(习题4.12)

$$na^{n-1}u[n] \leftrightarrow \frac{z}{(z-a)^2} \qquad |z|>|a| \tag{4.86}$$

现在,由式(4.85)

$$X(z) = z\left[\frac{z}{(z-a)^2}\right] \qquad |z|>|a|$$

对式(4.85)应用时间平移性质式(4.20),得

$$x[n] = (n+1)a^n u(n+1) = (n+1)a^n u[n] \tag{4.87}$$

因为在$n=-1$处$x[-1]=0$。

系统函数

4.25 利用z变换,重做习题2.28。

[redacted] 由习题2.28,$x[n]$和$h[n]$为

$$x[n] = u[n] \qquad h[n] = a^n u[n], \qquad 0<a<1$$

由表4.1,

$$x[n] = u[n] \leftrightarrow X(z) = \frac{z}{z-1} \qquad |z|>|1|$$

$$h[n] = a^n u[n] \leftrightarrow H(z) = \frac{z}{z-a} \qquad |z|>|a|$$

则由式(4.40)

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-a)} \qquad |z|>|1|$$

利用部分分式展开法,得

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)(z-a)} = \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_2}{z-a}$$

其中

$$c_1 = \frac{z}{z-a}\bigg|_{z=a} = \frac{1}{1-a}$$

$$c_2 = \left.\frac{z}{z-1}\right|_{z=a} = -\frac{a}{1-a}$$

因此，

$$Y(z) = \frac{1}{1-a}\frac{z}{z-1} - \frac{a}{1-a}\frac{z}{z-a} \qquad |z|>1$$

对 $Y(z)$进行 z 反变换，得

$$y[n] = \frac{1}{1-a}u[n] - \frac{a}{1-a}a^n u[n] - \left(\frac{1-a^{n-1}}{1-a}\right)^* u[n]$$

与式(2.134)相同。

4.26 利用 z 变换，重做习题 2.29。

[redacted] (a)由习题 2.29(a)，$x[n]$和 $h[n]$为

$$x[n] = a^n u[n] \qquad h[n] = \beta^n u[n]$$

由表 4.1，得

$$x[n] = a^n u[n] \leftrightarrow X(z) = \frac{z}{z-a} \qquad |z|>|a|$$

$$h[n] = \beta^n u[n] \leftrightarrow H(z) = \frac{z}{z-\beta} \qquad |z|>|\beta|$$

则

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{z^2}{(z-a)(z-\beta)} \qquad |z|>\max(a,\beta)$$

利用部分分式展开法，得

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z}{(z-a)(z-\beta)} = \frac{c_1}{z-a} + \frac{c_2}{z-\beta}$$

其中

$$c_1 = \left.\frac{z}{z-\beta}\right|_{z=\beta} = \frac{\alpha}{\alpha-\beta} \qquad c_2 = \left.\frac{z}{z-\alpha}\right|_{z=\beta} = -\frac{\beta}{\alpha-\beta}$$

因此

$$Y(z) = \frac{\alpha}{\alpha-\beta}\frac{z}{z-a} - \frac{\beta}{\alpha-\beta}\frac{z}{z-\beta} \qquad |z|>\max(a,\beta)$$

且

$$y[n] = \left[\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\alpha^n - \frac{\beta}{\alpha-\beta}\beta^n\right]u[n] = \left(\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}\right)u[n]$$

与式(2.135)相同。当 $\alpha=\beta$ 时，

$$Y(z) = \frac{z^2}{(z-a)^2} \qquad |z|>a$$

利用部分分式展开法，得

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z}{(z-a)^2} = \frac{\lambda_1}{z-a} + \frac{\lambda_2}{(z-a)^2}$$

其中

$$\lambda_2 = z|_{z=a} = a$$

且

$$\frac{z}{(z-a)^2} = \frac{\lambda_1}{z-a} + \frac{a}{(z-a)^2}$$

在上式中设 $z=0$，得

$$0 = -\frac{\lambda_1}{a} + \frac{1}{a} \rightarrow \lambda_1 = 1$$

因此

$$Y(z) = \frac{z}{z-a} + \frac{az}{(z-a)^2} \qquad |z|>a$$

因此，由表 4.1 得

$$y[n] = (a^n + na^n)u[n] = a^n(1+n)u[n]$$

因此，得到的结果与式(2.135)相同。

(b)由习题 2.29(b)，$x[n]$和 $h[n]$为

$$x[n]=a^nu[n] \qquad h[n]=a^{-n}u[-n] \qquad 0<a<1$$

由表4.1和式(4.75)

$$x[n]=a^nu[n]\leftrightarrow X(z)=\frac{z}{z-a} \qquad |z|>|a|$$

$$h[n]=a^{-n}u[-n]\leftrightarrow H(z)=\frac{z}{1-az}=-\frac{1}{a(z-1/a)} \qquad |z|<\frac{1}{|a|}$$

则

$$Y(z)=X(z)H(z)=-\frac{1}{a}\frac{z}{(z-a)(z-1/a)} \qquad a<|z|<\frac{1}{a}$$

利用部分分式展开法,得

$$\frac{Y(z)}{z}=-\frac{1}{a}\frac{z}{(z-a)(z-1/a)}=-\frac{1}{a}\left(\frac{c_1}{z-a}+\frac{c_2}{z-1/a}\right)$$

其中

$$c_1=\left.\frac{z}{z-1/a}\right|_{z=a}=-\frac{a}{1-a^2} \qquad c_2=\left.\frac{z}{z-a}\right|_{z=1/a}=\frac{a}{1-a^2}$$

因此

$$Y(z)=\frac{1}{1-a^2}\frac{z}{z-a}-\frac{1}{1-a^2}\frac{z}{z-1/a} \qquad a<|z|<\frac{1}{a}$$

因此,由表4.1得

$$y[n]=\frac{1}{1-a^2}a^nu[n]-\frac{1}{1-a^2}\left(-\left(\frac{1}{a}\right)^nu[-n-1]\right)$$

$$=\frac{1}{1-a^2}a^nu[n]+\frac{1}{1-a^2}a^{-n}u[-n-1]=\frac{1}{1-a^2}a^{|n|}$$

与式(2.137)相同。

4.27 利用z变换,重做2.30题。

解 由图2-23和式(4.3)得

$$x[n]=\{1,1,1,1\}\leftrightarrow X(z)=1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}$$

$$h[n]=\{1,1,1\}\leftrightarrow H(z)=1+z^{-1}+z^{-2}$$

则根据卷积性质(4.46),得

$$Y(z)=X(z)H(z)=(1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3})(1+z^{-1}+z^{-2})$$

$$=1+2z^{-1}+3z^{-2}+3z^{-3}+2z^{-4}+z^{-5}$$

因此

$$h[n]=\{1,2,3,3,2,1\}$$

与习题2.30得到的结果相同。

4.28 利用z变换,重做习题2.32。

解 设系统的输入和输出为$x[n]$和$y[n]$,则

$$x[n]=u[n]\leftrightarrow X(z)=\frac{z}{z-1} \qquad |z|>1$$

$$y[n]=a^nu[n]\leftrightarrow Y(z)=\frac{z}{z-a} \qquad |z|>|a|$$

则由式(4.41)

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{z-1}{z-a} \qquad |z|>a$$

利用部分分式展开法,得

$$\frac{H(z)}{z}=\frac{z-1}{z(z-a)}=\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z-a}$$

其中

$$c_1=\left.\frac{z-1}{z-a}\right|_{z=0}=\frac{1}{a} \qquad c_2=\left.\frac{z-1}{z}\right|_{z=a}=-\frac{1-a}{a}$$

因此

$$H(z)=\frac{1}{a}-\frac{1-a}{a}\frac{z}{z-a} \qquad |z|>a$$

对 $H(z)$进行 z 反变换,得

$$h[n]=\frac{1}{\alpha}\delta[n]-\frac{1-\alpha}{\alpha}\alpha^n u[n]$$

当 $n=0$ 时,

$$h[0]=\frac{1}{\alpha}-\frac{1-\alpha}{\alpha}=1$$

则

$$h[n]=\begin{cases}1 & n=0\\ -(1-\alpha)\alpha^{n-1} & n\geqslant 1\end{cases}$$

因此,$h[n]$可以改写为

$$h[n]=\delta[n]-(1-\alpha)\alpha^{n-1}u[n-1]$$

与习题 2.32 所得结果相同。

4.29 一个离散时间 LTI 系统,如果输入 $x[n]$为 $u[n]$,输出 $y[n]$为 $2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$。

(a)求出系统的冲激响应 $h[n]$。

(b)求出输入 $x[n]$为$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$时的输出 $y[n]$。

(a)

$$x[n]=u[n]\leftrightarrow X(z)=\frac{z}{z-1}\qquad |z|>1$$

$$y[n]=2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]\leftrightarrow Y(z)=\frac{2z}{z-\frac{1}{3}}\qquad |z|>\frac{1}{3}$$

因此,系统函数 $H(z)$为

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{2(z-1)}{z-\frac{1}{3}}\qquad |z|>\frac{1}{3}$$

利用部分分式展开法,得

$$\frac{H(z)}{z}=\frac{2(z-1)}{z\left(z-\frac{1}{3}\right)}=\frac{c_1}{z}+\frac{c_2}{z-\frac{1}{3}}$$

其中

$$c_1=\left.\frac{2(z-1)}{z-\frac{1}{3}}\right|_{z=0}=6\qquad c_2=\left.\frac{2(z-1)}{z}\right|_{z=1/3}=-4$$

因此,

$$H(z)=6-4\frac{z}{z-\frac{1}{3}}\qquad |z|>\frac{1}{3}$$

对 $H(z)$进行 z 反变换,得

$$h[n]=6\delta[n]-4\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

(b)

$$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\leftrightarrow X(z)=\frac{z}{z-\frac{1}{2}}\qquad |z|>\frac{1}{2}$$

则

$$Y(z)=X(z)H(z)=\frac{2z(z-1)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)}\qquad |z|<\frac{1}{2}$$

利用部分分式展开法,得

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{2(z-1)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)}=\frac{c_1}{z-\frac{1}{2}}+\frac{c_2}{z-\frac{1}{3}}$$

其中

$$c_1=\left.\frac{2(z-1)}{z-\frac{1}{3}}\right|_{z=1/2}=-6\qquad c_2=\left.\frac{2(z-1)}{z-\frac{1}{3}}\right|_{z=1/3}=8$$

因此

$$Y(z) = -6\frac{z}{z-\frac{1}{2}} + 8\frac{z}{z-\frac{1}{3}} \qquad |z| > \frac{1}{2}$$

对$Y(z)$进行z反变换,得

$$y[n] = \left[-6\left(\frac{1}{2}\right)^n + 8\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]u[n]$$

4.30 如果一个离散时间LTI系统是BIBO稳定的,证明:其系统函数$H(z)$的收敛域必须包含单位圆,即$|z|=1$。

解 一个离散时间LTI系统,当且仅当其冲激响应$h[n]$是绝对可和时,该系统是BIBO稳定的,即[式(2.49)]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

现在

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

设$z = e^{j\Omega}$,则$|z| = |e^{j\Omega}| = 1$。因此

$$|H(e^{j\Omega})| = \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\Omega n}\right|$$

$$\leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]e^{-j\Omega n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

因此,可以看出,如果系统是稳定的,则$H(z)$在$z = e^{j\Omega}$处收敛。即对于一个离散时间LTI系统,$H(z)$的收敛域必须包含单位圆$|z|=1$。

4.31 利用z变换,重做习题2.38。

解 (a)由习题2.38,系统的冲激响应为

$$h[n] = a^n u[n]$$

则

$$H(z) = \frac{z}{z-a} \qquad |z| > |a|$$

因为$H(z)$的收敛域为单位圆$|z| > |a|$,$z-\infty$包括在内,则由习题4.5的结果可知,$h[n]$是一个因果序列。因此,系统是因果的。

(b)如果$|a|>1$,$H(z)$的收敛域不包含单位圆$|z|=1$,则系统不是稳定的。如果$|a|<1$,$H(z)$的收敛域包含单位圆$|z|=1$,则系统是稳定的。

4.32 一个因果的离散时间LTI系统描述如下

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{2}y[n-2] = x[n] \tag{4.88}$$

其中,$x[n]$和$y[n]$分别为系统的输入和输出。

(a)确定系统函数$H(z)$。

(b)求出系统的冲激响应$h[n]$。

(c)求出系统的阶跃响应$s[n]$。

解 (a)对式(4.88)进行z变换,得

$$Y(z) - \frac{3}{4}z^{-1}Y(z) + \frac{1}{8}z^{-2}Y(z) = X(z)1$$

或

$$\left(1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}\right)Y(z) = X(z)1$$

因此,

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8}}$$

$$= \frac{z^2}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)} \qquad |z|>\frac{1}{2}$$

(b)利用部分分式展开法,得

$$\frac{H(z)}{z} = \frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)} = \frac{c_1}{z-\frac{1}{2}} + \frac{c_2}{z-\frac{1}{4}}$$

其中

$$c_1 = \left.\frac{z}{z-\frac{1}{4}}\right|_{z=1/2} = 2 \qquad c_2 = \left.\frac{z}{z-\frac{1}{2}}\right|_{z=1/4} = -1$$

因此,

$$H(z) = 2\frac{z}{z-\frac{1}{2}} - \frac{z}{z-\frac{1}{4}} \qquad |z|>\frac{1}{2}$$

对 $H(z)$进行 z 反变换,得

$$h[n] = \left[2\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right]u[n]$$

(c)

$$x[n] = u[n] \leftrightarrow X(z) = \frac{z}{z-1} \qquad |z|>1$$

则

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{z^3}{(z-1)\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)} \qquad |z|>1$$

利用部分分式展开法,得

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z^2}{(z-1)\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)} = \frac{c_1}{z-1} + \frac{c_2}{z-\frac{1}{2}} + \frac{c_3}{z-\frac{1}{4}}$$

其中

$$c_1 = \left.\frac{z^2}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}\right|_{z=1} = \frac{8}{3} \qquad c_2 = \left.\frac{z^2}{(z-1)\left(z-\frac{1}{4}\right)}\right|_{z=1/2} = -2$$

$$c_3 = \left.\frac{z^2}{(z-1)\left(z-\frac{1}{2}\right)}\right|_{z=1/4} = \frac{1}{3}$$

因此

$$Y(z) = \frac{8}{3}\frac{z}{z-1} - 2\frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}\frac{z}{z-\frac{1}{4}} \qquad |z|>1$$

对 $Y(z)$进行 z 反变换,得

$$y[n] = s[n] = \left[\frac{8}{3} - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]u[n]$$

4.33 利用 z 变换,重做习题 2.41。

[redacted] 与习题 2.41 一样,由图 2-30 可以看出

$$q[n] = 2q[n-1] + x[n]$$
$$y[n] = q[n] + 3q[n-1]$$

对上式进行 z 变换,得

$$Q(z) = 2z^{-1}Q(z) + X(z)$$
$$Y(z) = Q(z) + 3z^{-1}Q(z)$$

重新排列,得

$$(1-2z^{-1})Q(z) = X(z)$$
$$(1+3z^{-1})Q(z) = Y(z)$$

由此可得

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + 3z^{-1}}{1 - 2z^{-1}} \tag{4.89}$$

改写式(4.89),得

$$(1 - 2z^{-1})Y(z) = (1 + 3z^{-1})X(z)$$

或

$$Y(z) - 2z^{-1}Y(z) = X(z) + 3z^{-1}X(z) \tag{4.90}$$

对式(4.90)进行 z 反变换,利用时间平移性质式(4.18),得

$$y[n] - 2y[n-1] = x[n] + 3x[n-1]$$

与式(2.148)相同。

4.34 考虑如图4-8所示的离散时间系统,k 为何值可以使系统稳定?

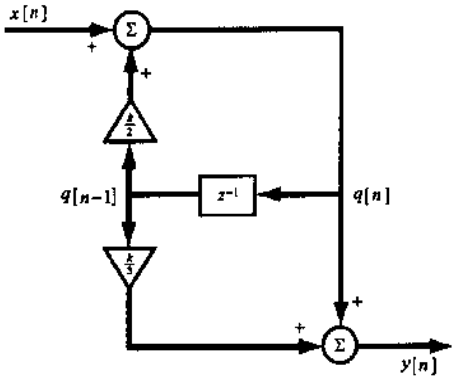


图4-8

解 由图4-8可以看出

$$q[n] = x[n] + \frac{k}{2}q[n-1]$$

$$y[n] = q[n] + \frac{k}{3}q[n-1]$$

对上式进行 z 变换,得

$$Q(z) = X(z) + \frac{k}{2}z^{-1}Q(z)$$

$$Y(z) = Q(z) + \frac{k}{3}z^{-1}Q(z)$$

重新排列,得

$$\left(1 - \frac{k}{2}z^{-1}\right)Q(z) = X(z)$$

$$\left(1 + \frac{k}{3}z^{-1}\right)Q(z) = Y(z)$$

由此可得

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + (k/3)z^{-1}}{1 - (k/2)z^{-1}} = \frac{z + k/3}{z - k/2} \qquad |z| > \left|\frac{k}{2}\right|$$

该系统在 $z = -k/3$ 处有一个零点,在 $z = k/2$ 处有一个极点,且收敛域为 $|z| > |k/2|$。因此,与习题4.30一样,如果收敛与包含单位圆($|z| = 1$),系统是BIBO稳定的。因此,如果 $|k| < 2$,系统是稳定的。

单边 z 变换

4.35 求出下列序列 $x[n]$ 的单边 z 变换:

(a) $x[n] = a^n u[n]$

(b) $x[n] = a^{n+1}u[n+1]$

解 (a)因为当 $n < 0$ 时 $x[n] = 0$, $X_I(z) = X(z)$,由例4.1得

$$X_1(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a} \qquad |z| > |a| \tag{4.91}$$

(b)由定义式(4.49)得

$$X_I(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a^{n-1}u[n+1]z^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}a^{n+1}z^{-n}=a\sum_{n=0}^{\infty}(az^{-1})^{n}$$
$$=a\frac{1}{1-az^{-1}}=\frac{az}{z-a}\qquad |z|>|a| \tag{4.92}$$

注意,在这种情况下,$x[n]$不是因果序列。因此,$X_I(z)\neq X(z)$[见习题 4.10 中的式(4.73)]。

4.36 验证式(4.50)和(4.51),即对于 $m\geqslant 0$

(a)$x[n-m]\leftrightarrow z^{-m}X_I(z)+z^{-m+1}x[-1]+z^{-m+2}x[-2]+\cdots+x[-m]$

(b)$x[n+m]\leftrightarrow z^{m}X_I(z)-z^{m}x[0]-z^{m-1}x[1]-\cdots-zx[m-1]$

解 (a)由定义式(4.49),并且改变变量 $k=n-m$,得

$$\mathscr{Z}_I\{x[n-m]\}=\sum_{n=0}^{\infty}x[n-m]z^{-n}=\sum_{k=m}^{\infty}x[k]z^{-(m+k)}$$
$$=z^{-m}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}x[k]z^{-k}+\sum_{k=-1}^{-m}x[k]z^{-k}\right\}$$
$$=z^{-m}\{X_I(z)+x[-1]z+x[-2]z^{2}+\cdots+x[-m]z^{m}\}$$
$$=z^{-m}X_I(z)+z^{-m+1}x[-1]+z^{-m+2}x[-2]+\cdots+x[-m]$$

(b)对于 $m\geqslant 0$

$$\mathscr{Z}_I\{x[n-m]\}=\sum_{n=0}^{\infty}x[n+m]z^{-n}=\sum_{k=m}^{\infty}x[k]z^{-(k-m)}$$
$$=z^{m}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}x[k]z^{-k}-\sum_{k=0}^{m-1}x[k]z^{-k}\right\}$$
$$=z^{m}\{X_I(z)-(x[0]+x[1]z^{-1}+\cdots+x[m-1]z^{-(m-1)})\}$$
$$=z^{m}X_I(z)-z^{m}x[0]-z^{m-1}x[1]-\cdots-zx[m-1]$$

4.37 利用单边 z 变换,重做习题 4.42。

解 该系统为

$$y[n]-ay[n-1]=x[n] \tag{4.93}$$

且 $y[-1]=y_{-1}$,$x[n]=Kb^{n}u[n]$。设

$$y[n]\leftrightarrow Y_I(z)$$

则由式(4.50)

$$y[n-1]\leftrightarrow z^{-1}Y_I(z)+y[-1]=z^{-1}Y_I(z)+y_{-1}$$

由表 4.1 得

$$x[n]\leftrightarrow X_I(z)=K\frac{z}{z-b}\qquad |z|>|b|$$

对式(4.93)进行单边 z 变换,得

$$Y_I(z)-a\{z^{-1}Y_I(z)+y_{-1}\}=K\frac{z}{z-b}$$

或

$$(1-az^{-1})Y_I(z)=ay_{-1}+K\frac{z}{z-b}$$

或

$$\left(\frac{z-a}{z}\right)Y_I(z)=ay_{-1}+K\frac{z}{z-b}$$

因此

$$Y_I(z)=ay_{-1}\frac{z}{z-a}+K\frac{z^{2}}{(z-a)(z-b)}$$

利用部分分式展开法,得

$$Y_I(z)=ay_{-1}\frac{z}{z-a}+\frac{K}{b-a}\left(b\frac{z}{z-b}-a\frac{z}{z-a}\right)$$

对 $Y_I(z)$进行 z 反变换,得

$$y[n]=ay_{-1}a^{n}u[n]+K\frac{b}{b-a}b^{n}u[n]-K\frac{a}{b-a}a^{n}u[n]$$

$$= \left(y_{-1}a^{n-1} + K\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a} \right) u[n]$$

与式(2.158)相同。

4.38 已知下列差分方程以及相关的输入和初始条件，确定输出 $y[n]$：

(a) $y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n]$，且 $x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n$，$y[-1] = 1$

(b) $3y[n] - 4y[n-1] + y[n-2] = x[n]$，且 $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n$，$y[-1] = 1$，$y[-2] = 2$

[redacted] (a)

$$x[n] \leftrightarrow X_I(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{3}} \qquad |z| > \left|\frac{1}{3}\right|$$

对上式差分方程进行单边 z 变换，得

$$Y_I(z) - \frac{1}{2}\{z^{-1}Y_I(z) + y[-1]\} = X_I(z)$$

将 $y[-1] = 1$ 和 $X_I(z)$ 代入上式，得

$$\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) Y_I(z) = \frac{1}{2} + \frac{z}{z - \frac{1}{3}}$$

或

$$\left(\frac{z - \frac{1}{2}}{z}\right) Y_I(z) = \frac{1}{2} + \frac{z}{z - \frac{1}{3}}$$

则

$$Y_I(z) = \frac{1}{2}\frac{z}{z - \frac{1}{2}} + \frac{z^2}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{3}\right)} = \frac{7}{2}\frac{z}{z - \frac{1}{2}} - 2\frac{z}{z - \frac{1}{3}}$$

因此

$$y[n] = 7\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n \qquad n \geqslant -1$$

(b)

$$x[n] \leftrightarrow X_I(z) = \frac{z}{z - \frac{1}{2}} \qquad |z| > \left|\frac{1}{2}\right|$$

对上式差分方程进行单边 z 变换，得

$$3Y_I(z) - 4\{z^{-1}Y_I(z) + y[-1]\} + \{z^{-2}Y_I(z) + z^{-1}y[-1] + y[-2]\} = X_I(z)$$

将 $y[-1] = 1$、$y[-2] = 2$ 和 $X_I(z)$ 代入上式，得

$$(3 - 4z^{-1} + z^{-2})Y_I(z) - 2 - z^{-1} + \frac{z}{z - \frac{1}{2}}$$

或

$$\frac{3(z-1)\left(z - \frac{1}{3}\right)}{z^2} Y_I(z) = \frac{3z^2 - 2z + \frac{1}{2}}{z\left(z - \frac{1}{2}\right)}$$

则

$$Y_I(z) = \frac{z\left(3z^2 - 2z + \frac{1}{2}\right)}{3(z-1)\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{2}\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - \frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\frac{z}{z - \frac{1}{3}}$$

因此

$$y[n] = \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n \qquad n \geqslant -2$$

4.39 设 $x[n]$ 是一个因果序列，且

$$x[n] \leftrightarrow X(z)$$

证明：

$$x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z) \tag{4.94}$$

式(4.94)称为 z 变换的初值定理。

[redacted] 因为当 $n<0$ 时，有

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} = x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \cdots$$

由于 $n>0$ 时，$z\to\infty$，$z^{-n}\to 0$。因此，得

$$\lim_{z\to\infty} X(z) = x[0]$$

4.40 设 $x[n]$ 是一个因果序列，且

$$x[n] \leftrightarrow X(z)$$

证明：如果 $X(z)$ 是一个有理函数，除 $z=1$ 处可能存在的一阶极点以外，其他所有极点都在单位圆内，则

$$\lim_{N\to\infty} x[N] = \lim_{z\to\infty}(1 - z^{-1})X(z) \tag{4.95}$$

式(4.95)称为 z 变换的终值定理。

[redacted] 由时间平移性质式(4.19)，有

$$\mathcal{Z}\{x[n] - x[n-1]\} = (1 - z^{-1})X(z) \tag{4.96}$$

式(4.96)的左边可以写为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\{x[n] - x[n-1]\}z^{-n} = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\{x[n] - x[n-1]\}z^{-n}$$

由时间平移性质式(4.19)，有

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} = x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \cdots$$

现在，设 $z\to 1$，则由式(4.96)，得

$$\lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})X(z) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}\{x[n] - x[n-1]\} = \lim_{N\to\infty} x[N]$$

补充习题

4.41 求出下列序列 $x[n]$ 的 z 变换：

(a) $x[n] = \left\{\frac{1}{2},\ 1,\ -\frac{1}{3}\right\}$

(b) $x[n] = 2\delta[n+2] - 3\delta[n-2]$

(c) $x[n] = 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2(3)^n u[-n-1]$

(d) $x[n] = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[-n-1]$

答案 (a) $X(z) = \frac{1}{2} + z^{-1} - \frac{1}{3}z^{-2}$，$0<|z|$

(b) $X(z) = 2z^3 - 3z^{-3}$，$0<|z|<\infty$

(c) $X(z) = \dfrac{z(5z-8)}{\left(z+\frac{1}{2}\right)(z-3)}$，$\frac{1}{2}<|z|<3$

(d) $X(z)$ 不存在。

4.42 证明：如果 $x[n]$ 是一个左边序列，且在某个 z 值处收敛，则 $X(z)$ 的收敛域为

$$|z| < r_{\min} \quad 或 \quad 0<|z|<r_{\min}$$

其中，$r_{\min}$ 是 $X(z)$ 极点的最小幅度。

提示 与习题 4.5 的解题方法相同。

4.43 已知

$$X(z) = \frac{z(z-4)}{(z-1)(z-2)(z-3)}$$

(a) 列出所有收敛域。

(b)哪一个收敛域能使 $X(z)$是因果序列的 z 变换?

答案 (a)$0<|z|<1$, $1<|z|<2$, $2<|z|<3$, $|z|>3$

(b)$|z|>3$

4.44 验证时间翻转性质式(4.23),即

$$x[-n] \longleftrightarrow X\left(\frac{1}{z}\right) \qquad R' = \frac{1}{R}$$

提示 将定义式(4.3)中的 n 改为 $-n$。

4.45 证明下列 z 变换的性质:

(a)如果 $x[n]$为偶序列,则 $X(z^{-1}) = X(z)$。

(b)如果 $x[n]$为奇序列,则 $X(z^{-1}) = -X(z)$。

(c)如果 $x[n]$为奇序列,则 $X(z)$在 $z=1$ 处有一个零点。

提示 (a)利用式(1.2)和(4.23);

(b)利用式(1.3)和(4.23);

(c)利用(b)的结果。

4.46 考虑连续时间信号

$$x(t) = e^{-at} \qquad t \geqslant 0$$

设序列 $x[n]$可以通过对 $x(t)$的均匀取样得到,即 $x[n]=x(nT_s)$,其中 T_s 是取样间隔。求出 $x[n]$的 z 变换。

答案

$$X(z) = \frac{1}{1 - e^{-aT_s}z^{-1}}$$

4.47 推导下列变换对:

$$(\cos\Omega_0 n)u[n] \longleftrightarrow \frac{z^2 - (\cos\Omega_0)z}{z^2 - (2\cos\Omega_0)z + 1} \qquad |z|>1$$

$$(\sin\Omega_0 n)u[n] \longleftrightarrow \frac{z^2 - (\sin\Omega_0)z}{z^2 - (2\sin\Omega_0)z + 1} \qquad |z|>1$$

提示 利用欧拉公式

$$\cos\Omega_0 n = \frac{1}{2}(e^{j\Omega_0 n} + e^{-j\Omega_0 n}) \qquad \sin\Omega_0 n = \frac{1}{2j}(e^{j\Omega_0 n} - e^{-j\Omega_0 n})$$

并且利用式(4.8)和(4.10),使 $a = e^{\pm j\Omega_0}$。

4.48 求出下列序列 $x[n]$的 z 变换:

(a)$x[n]=(n-3)u[n-3]$

(b)$x[n]=(n-3)u[n]$

(c)$x[n]=u[n]-u[n-3]$

(d)$x[n]=n\{u[n]-u[n-3]\}$

答案 (a)$\frac{z^{-2}}{(z-1)^2}$, $|z|>1$

(b)$\frac{-3z^2+4z}{(z-1)^2}$, $|z|>1$

(c)$\frac{z-z^{-2}}{z-1}$, $|z|>1$

(d)$\frac{z-4z^{-2}+3z^{-3}}{(z-1)^2}$, $|z|>1$

4.49 利用关系

$$a^n u[n] \longleftrightarrow \frac{z}{z-a}, \quad |z|>|a|$$

求出下列序列 $x[n]$的 z 变换:

(a)$x[n]=na^{n-1}u[n]$

(b)$x[n]=n(n-1)a^{n-2}u[n]$

(c)$x[n]=n(n-1)\cdots(n-k+1)a^{n-k}u[n]$

提示 连续对给定的关系式两端求 a 的微分。

答案　(a)$\frac{z}{(z-a)^2}$, $|z|>|a|$

(b)$\frac{2z}{(z-a)^3}$, $|z|>|a|$

(c)$\frac{k!\,z}{(z-a)^{k+1}}$, $|z|>|a|$

4.50　利用 z 变换,验证习题 2-27 中的式(2.130)和(2.131),即

(a)$x[n]*\delta[n]=x[n]$

(b)$x[n]*\delta[n-n_0]=x[n-n_0]$

提示　利用 z 变换的式(4.26)以及表 4.1 中的变换对 1 和 4。

4.51　利用 z 变换,重做习题 2.47。

提示　利用式(4.26)以及表 4.1。

4.52　求出下面 $X(z)$的 z 反变换

$$X(z)=e^{a/z}\quad |z|>0$$

提示　利用指数函数 e^x 的幂级数展开法。

答案　$x[n]=\frac{a^n}{n!}u[n]$

4.53　利用长除法,求出下列 $X(z)$的 z 反变换:

(a)$\frac{z}{(z-1)(z-2)}$, $|z|<1$

(b)$\frac{z}{(z-1)(z-2)}$, $1<|z|<2$

(c)$\frac{z}{(z-1)(z-2)}$, $|z|>2$

答案　(a)$x[n]=\left\{\cdots,\ \frac{7}{8},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{2},\ \underset{\uparrow}{0}\right\}$

(b)$x[n]=\left\{\cdots,\ -\frac{1}{8},\ -\frac{1}{4},\ -\frac{1}{2},\ \underset{\uparrow}{-1},\ -1,\ -1,\ \cdots\right\}$

(c)$x[n]=\{0,\ 1,\ 3,\ 7,\ 15,\ \cdots\}$

4.54　利用部分分式法,重做习题 4.53。

答案　(a)$x[n]=(1-2^n)u[-n-1]$

(b)$x[n]=-u[n]-2^nu[-n-1]$

(c)$x[n]=(-1+2^n)u[n]$

4.55　考虑如图 4-9 所示的系统。求出系统函数 $H(z)$及其冲激响应 $h[n]$。

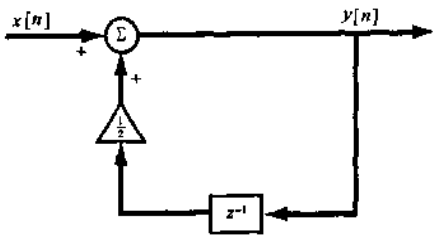


图 4-9

答案

$$H(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}},\quad h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^nu[n]$$

4.56　考虑如图 4-10 所示的系统。

(a)求出系统函数 $H(z)$。

(b)求出有关输入 $x[n]$和输出 $y[n]$的差分方程。

答案　(a)$H(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{1+a_1z^{-1}+z_2z^{-2}}$

(b)$y[n]+a_1y[n-1]+a_2y[n-2]=b_0x[n]+b_1x[n-1]+b_2x[n-2]$

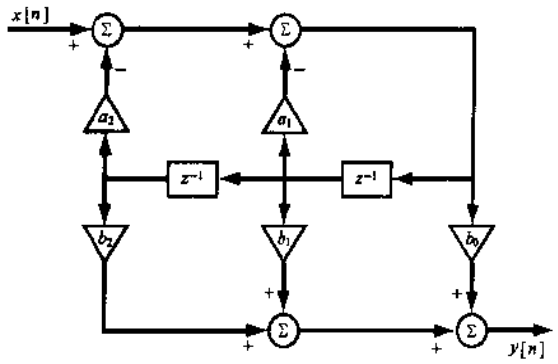


图 4-10

4.57 考虑一个离散时间LTI系统,其系统函数 $H(z)$为

$$H(z)=\frac{z}{z-\frac{1}{2}} \qquad |z|>\frac{1}{2}$$

(a)求出阶跃响应 $s[n]$。

(b)求出输入 $x[n]=nu[n]$时的输出 $y[n]$。

答案 (a)$s[n]=\left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]u[n]$

(b)$y[n]=2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n+n-1\right]u[n]$

4.58 考虑一个因果离散时间LTI系统,其输入 $x[n]$和输出 $y[n]$的关系为

$$y[n]-\frac{5}{6}y[n-1]+\frac{1}{6}y[n-2]=x[n]$$

(a)求出系统函数 $H(z)$。

(b)求出冲激响应 $h[n]$。

答案 (a)$H(z)=\dfrac{z^2}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)}$, $|z|>\frac{1}{2}$

(b)$h[n]=\left[3\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]u[n]$

4.59 利用单边 z变换,解下列给定初始条件的差分方程:

(a)$y[n]-3y[n-1]=x[n]$, $x[n]=4u[n]$, $y[-1]=1$

(b)$y[n]-5y[n-1]+6y[n-2]=x[n]$, $x[n]=u[n]$, $y[-1]=3$, $y[-2]=2$

答案 (a)$y[n]=-2+9(3)^n$, $n\geqslant -1$

(b)$y[n]=\frac{1}{2}+8(2)^n-\frac{9}{2}(3)^n$, $n\geqslant -2$

4.60 为下列 $X(z)$确定 $x[n]$的初值和终止:

(a)$X(z)=\dfrac{2z\left(z-\frac{5}{12}\right)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)}$, $|z|>\frac{1}{2}$

(b)$X(z)=\dfrac{z}{2z^2-3z+1}$, $|z|>1$

答案 (a)$x[0]=2$, $x[\infty]=0$

(b)$x[0]=0$, $x[\infty]=1$

第5章 连续时间信号与系统的傅里叶分析

5.1 引言

在前面各章中介绍了利用拉普拉斯变换和 z 变换将时域信号转换为 s 域和 z 域表示。通过这些变换不仅可以对信号进行分析和处理，还可以进一步认识信号与系统的许多特性与特征。在这一章和下一章将介绍另一种变换——傅里叶变换，把信号由时域表示转换为频域(或频谱)表示。傅里叶分析不仅可以用于信号的频谱表示，而且还是频域描述系统类型和特性所必需的工具。下面我们先介绍连续时间信号与系统的傅里叶分析。

5.2 周期信号傅里叶的表示

A. 周期信号

在第一章曾定义，如果存在一个非零正值 T 使得 $x(t)$ 满足

$$x(t+T) = x(t) \qquad \text{对所有 } t \tag{5.1}$$

则 $x(t)$ 为周期信号，$x(t)$ 的基波周期 T_0 为满足式(5.1) T 值中的最小正值，$1/T_0 = f_0$ 称为基波频率。

式(5.2)正弦型信号和式(5.3)复指数信号是两个基本的周期信号：

$$x(t) = \cos(\omega_0 t + \varphi) \tag{5.2}$$

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} \tag{5.3}$$

式中 $\omega_0 = 2\pi/T_0 = 2\pi f_0$，称为基波角频率。

B. 复指数型傅里叶级数

基波周期为 T_0 的周期信号 $x(t)$ 的复指数型傅里叶级数表示为：

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \tag{5.4}$$

式中 c_k 称为复傅里叶系数，可由下式求出：

$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \tag{5.5}$$

式中 $\int_{T_0}$ 表示积分区间为任意一个周期，通常习惯取0到 T_0 或 $-T_0/2$ 到 $T_0/2$ 的一个周期积分。

在式(5.5)中设 $k = 0$ 可得到

$$c_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t) dt \tag{5.6}$$

即 c_0 等于 $x(t)$ 一个周期的平均值。

当 $x(t)$ 为实数时，由式(5.5)可推出

$$c_{-k} = c_k^* \tag{5.7}$$

式中星号表示复数的共轭。

C. 三角型傅里叶级数

基波周期为 T_0 的周期信号 $x(t)$ 的三角型傅里叶级数表示为：

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=-\infty}^{\infty}(a_k\cos k\omega_0 t + b_k\sin k\omega_0 t) \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \tag{5.8}$$

式中 a_k 和 b_k 称为傅里叶系数,可由下式求出:

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\cos\omega_0 t dt \tag{5.9a}$$

$$b_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\sin\omega_0 t dt \tag{5.9b}$$

傅里叶系数 a_k、b_k 与复傅里叶系数 c_k 关系如下:

$$\frac{a_0}{2} = c_0 \qquad a_k = c_k + c_{-k} \qquad b_k = j(c_k - c_{-k}) \tag{5.10}$$

由式(5.10)可得

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - jb_k) \qquad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + jb_k) \tag{5.11}$$

当 $x(t)$为实数时,a_k、b_k 为实数,由式(5.10)可得

$$a_k = 2\mathrm{Re}[c_k] \quad b_k = -2\mathrm{Im}[c_k] \tag{5.12}$$

偶信号与奇信号

若周期信号 $x(t)$为偶信号,则 $b_k=0$,式(5.8)的傅里叶级数只包含余弦项:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\cos k\omega_0 t \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \tag{5.13}$$

若周期信号 $x(t)$为奇信号,则 $a_k=0$,式(5.8)的傅里叶级数只包含正弦项:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k\sin k\omega_0 t \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \tag{5.14}$$

D. 谐波型傅里叶级数

基波周期为 T_0 的实周期信号 $x(t)$的傅里叶级数表示还有另外一种形式:

$$x(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k\cos(k\omega_0 t - \theta_k) \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \tag{5.15}$$

式(5.15)可以从式(5.8)推出,称为 $x(t)$的谐波型傅里叶级数。C_0 项称为直流分量,$C_k\cos(k\omega_0 t - \theta_k)$项称为 $x(t)$的 k 次谐波分量。一次谐波分量 $C_1\cos(\omega_0 t - \theta_1)$与 $x(t)$的基波周期相同,通常称为基波分量。系数 C_k 和角度 θ_k 与傅里叶系数 a_k、b_k 的关系为

$$C_0 = \frac{a_0}{2} \qquad C_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \qquad \theta_k = \arctan\frac{b_k}{a_k} \tag{5.16}$$

对实周期信号 $x(t)$来说,式(5.4)所给出的复指数形式的傅里叶级数在数学上与式(5.8)和(5.15)两种形式是等效的。尽管这两种形式均是普遍采用的傅里叶级数表示式,但是式(5.4)所给出的复指数表示式更为普遍,使用也特别方便。因此今后将几乎毫无例外地采用这种形式。

E. 傅里叶级数的收敛

如果周期信号 $x(t)$满足狄里赫来(Dirichlet)条件,就可以保证该信号能够用傅里叶级数表示。狄里赫来条件是:

1. 在任何周期内,$x(t)$绝对可积,即

$$\int_{T_0} |x(t)|\,dt < \infty \tag{5.17}$$

2. 在任何有限区间内,$x(t)$具有有限个最大值和最小值。

3. 在任何有限区间内,$x(t)$具有有限个不连续点,并且每个不连续点都必须是有限值。

注意,狄里赫来条件是充分条件而不是必要条件(习题5.8)。

F. 周期信号的幅度谱和相位谱

将式(5.4)复傅里叶系数 C_k 表示为

$$C_k = |C_k| e^{j\varphi_k} \tag{5.18}$$

$|C_k|$ 与角频率 ω 的关系曲线称为周期信号 $x(t)$ 的幅度谱。φ_k 与角频率 ω 的关系曲线称为周期信号 $x(t)$ 的相位谱。因为符号 k 仅设为整数,所以幅度谱和相位谱不是连续曲线,其值仅出现在离散频率 $k\omega_0$ 点上,因此幅度谱和相位谱称为离散谱或线谱。

对于实周期信号 $x(t)$,有 $c_{-k} = c_k^*$,因此

$$|c_{-k}| = |c_k| \qquad \varphi_{-k} = \varphi_k \tag{5.19}$$

可见,幅度谱是 ω 的偶函数,相位谱是 ω 的奇函数。

G. 周期信号的功率

在第一章(习题1.18)介绍了周期信号 $x(t)$ 在任何周期内的平均功率的计算公式:

$$P = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2 dt \tag{5.20}$$

如果 $x(t)$ 采用式(5.4)复指数傅里叶级数表示,可以证明(习题5.14)

$$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \tag{5.21}$$

式(5.21)称为傅里叶级数的帕斯瓦尔定理(或帕斯瓦尔理论)。

5.3 傅里叶变换

A. 从傅里叶级数到傅里叶变换

设 $x(t)$ 为时限非周期信号,即

$$x(t) = 0 \qquad |t| > T_1$$

如图5-1(a)所示。设 $x_{T_0}(t)$ 表示基波周期为 T_0 的周期信号,如图5-1(b)所示。令 $T_0 \to \infty$,可得

$$\lim_{T_0\to\infty} x_{T_0}(t) = x(t) \tag{5.22}$$

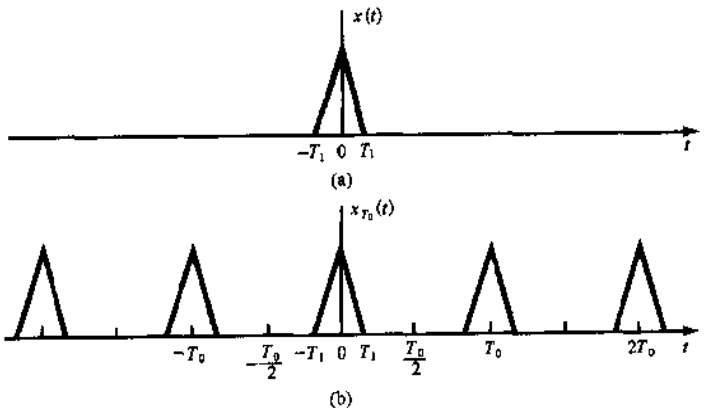


图 5-1

$x_{T_0}(t)$ 用复指数傅里叶级数表示为

$$x_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \tag{5.23}$$

式中
$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_{T_0}(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \tag{5.24a}$$

因为在$|t|<T_0/2$区间内$x_{T_0}(t)=x(t)$，而在此区间外$x(t)=0$，所以式(5.24a)可以改写成

$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \tag{5.24b}$$

定义$X(\omega)$为

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \tag{5.25}$$

根据式(5.24b)复傅里叶系数c_k可以表示成

$$c_k = \frac{1}{T_0}X(k\omega_0) \tag{5.26}$$

将式(5.26)代入式(5.3)得

$$x_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{T_0}X(k\omega_0)e^{jk\omega_0 t}$$

或
$$x_{T_0}(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(k\omega_0)e^{jk\omega_0 t}\omega_0 \tag{5.27}$$

当$T_0\to\infty$时，$\omega_0=2\pi/T_0\to 0$。设$\omega_0=\Delta\omega$，则式(5.27)变为

$$x_{T_0}(t)\,|_{T_0\to\infty} \to \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(k\Delta\omega)e^{jk\Delta\omega t}\Delta\omega \tag{5.28}$$

因此

$$x(t) = \lim_{T_0\to\infty} x_{T_0}(t) = \lim_{T_0\to\infty}\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(k\Delta\omega)e^{jk\Delta\omega t}\Delta\omega \tag{5.29}$$

式(5.29)右边的求和可以看作函数$X(\omega)e^{j\omega t}$的面积，如图5-2所示。由此可得

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{5.30}$$

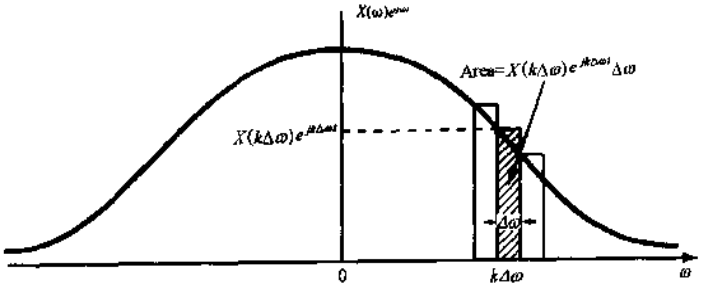


图5-2

这就是非周期信号的傅里叶表示。

B.傅里叶变换对

式(5.25)定义的函数$X(\omega)$称为$x(t)$的傅里叶变换，式(5.30)称为傅里叶反变换，用符号表示为

$$X(\omega) = \mathscr{F}[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt \tag{5.31}$$

$$x(t) = \mathscr{F}^{-1}[X(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{5.32}$$

或表示为

$$x(t)\leftrightarrow X(\omega) \tag{5.33}$$

式(5.33)表示$x(t)$和$X(\omega)$为傅里叶变换对。

C. 傅里叶谱

一般 $x(t)$的傅里叶变换 $X(\omega)$是复数,可以表示成

$$X(\omega) = |X(\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \tag{5.34}$$

按用于周期信号复傅里叶系数的术语类推,非周期信号的 $X(\omega)$是信号 $x(t)$的频域表示,称为 $x(t)$的频谱(或傅里叶谱)。$|X(\omega)|$称为 $x(t)$的幅度谱,$\varphi(\omega)$称为 $x(t)$的相位谱。

如果 $x(t)$为实信号,从式(5.31)可得

$$X(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j\omega t} dt \tag{5.35}$$

由此可推出

$$X(-\omega) = X^*(\omega) \tag{5.36a}$$

$$|X(-\omega)| = |X(\omega)| \quad \varphi(-\omega) = -\varphi(\omega) \tag{5.36b}$$

即幅度谱是 ω 的偶函数,相位谱是 ω 的奇函数。

D. 傅里叶变换的收敛

如同周期信号一样,$X(\omega)$收敛的充分条件如下(也称为狄里赫来条件):

1. 在任何周期内,$x(t)$绝对可积,即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \tag{5.37}$$

2. 在任何有限区间内,$x(t)$具有有限个最大值和最小值。

3. 在任何有限区间内,$x(t)$具有有限个不连续点,并且每个不连续点都必须是有限值。

上述狄里赫来条件保证了信号傅里叶变换的存在性,但是一些不满足狄里赫来条件的信号也有傅里叶变换,如冲激函数(习题 5.23)。

E. 傅里叶变换与拉普拉斯变换的关系

式(5.31)定义 $x(t)$的傅里叶变换为

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \tag{5.38}$$

式(4.3)定义 $x(t)$的双边拉普拉斯变换如下

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \tag{5.39}$$

比较式(5.38)和(5.39),可以看出傅里叶变换是拉普拉斯变换在 $s = j\omega$ 时的特例。

$$X(s)|_{s=j\omega} = \mathscr{F}[x(t)] \tag{5.40}$$

在式(5.39)中令 $s = \sigma + j\omega$,可得

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) e^{-\sigma t}] e^{-j\omega t} dt$$

或

$$X(\sigma + j\omega) = \mathscr{F}[x(t) e^{-\sigma t}] \tag{5.41}$$

这表示 $x(t)$的双边拉普拉斯变换可以看作 $x(t)e^{-\sigma t}$的傅里叶变换。

因为拉普拉斯变换变换可以看作是频率由 $j\omega$ 推广到 $s = \sigma + j\omega$ 的广义傅里叶变换,所以复变量 s 通常称为复频谱。

注意,因为式(5.39)的积分用符号 $X(s)$表示,式(5.38)的积分还可以 $X(j\omega)$表示,所以在书中其他地方当需要建立傅里叶变换与拉普拉斯变换关系时,$X(\omega)$与 $X(j\omega)$含义相同。虽然傅里叶变换是 $s = j\omega$ 时的拉普拉斯变换关系,信号 $x(t)$的傅里叶变换理应可以从拉普拉斯变换令 $s = j\omega$ 得到,但是 $x(t)$只有满足绝对可积,即满足式(5.37)条件这一关系才成立,而对于不满足绝对可积的信号 $x(t)$的傅里叶变换则不能从拉普拉斯变换令 $s = j\omega$ 得到。下面的例题证明了上述论点。

例 5.1 单位冲激信号 $\delta(t)$

由式(3.13), $\delta(t)$的拉普拉斯变换式为

$$\mathscr{L}\{\delta(t)\} = 1 \tag{5.42}$$

根据式(5.31)和(1.20)的定义, $\delta(t)$的傅里叶变换为

$$\mathscr{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1 \tag{5.43}$$

可见 $\delta(t)$的傅里叶变换和拉普拉斯变换相同。

例 5.2 指数信号

$$x(t) = e^{-at}u(t) \qquad a > 0$$

由式(3.13), $x(t)$的拉普拉斯变换式为

$$\mathscr{L}\{x(t)\} = X(s) = \frac{1}{s+a} \qquad \mathrm{Re}(s) > a \tag{5.44}$$

根据式(5.31)的定义, $x(t)$的傅里叶变换为

$$\begin{aligned} \mathscr{F}\{x(t)\} = X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{0^+}^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = \frac{1}{a+j\omega} \end{aligned} \tag{5.45}$$

比较式(5.44)和(5.45)可得

$$X(\omega) = X(s)\big|_{s=j\omega} \tag{5.46}$$

注意 $x(t)$满足绝对可积。

例 5.3 单位阶跃信号 $u(t)$

由式(3.14) $u(t)$的拉普拉斯变换式为

$$\mathscr{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s} \qquad \mathrm{Re}(s) > 0 \tag{5.47}$$

$u(t)$的傅里叶变换为(习题 5.30)

$$\mathscr{F}\{u(t)\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \tag{5.48}$$

可见 $u(t)$的傅里叶变换不能从其拉普拉斯变换得到,因为 $u(t)$不满足绝对可积。

5.4 连续时间傅里叶变换的性质

下面给出傅里叶变换的基本性质,其中许多性质和拉普拉斯变换的性质相似(见 3.4 节)。

A. 线性

$$a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \leftrightarrow a_1X_1(\omega) + a_2X_2(\omega) \tag{5.49}$$

B. 时移

$$x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0}X(\omega) \tag{5.50}$$

式(5.50)表明时域的时移仅仅使相频 $\theta(\omega)$增加了一个线性项 $-\omega t_0$,称为傅里叶变换 $X(\omega)$的线性相移。

C. 频移

$$e^{j\omega_0 t}x(t) \leftrightarrow X(\omega - \omega_0) \tag{5.51}$$

$x(t)$与复指数 $e^{j\omega_0 t}$相乘有时称为复调制。式(5.51)表明时域复调制对应频域 $X(\omega)$移动。式(5.51)的频移特性和式(5.50)的时移特性对偶。

D. 时间展缩

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right) \tag{5.52}$$

其中 a 是实数。该性质可以从傅里叶变换的定义直接推出。式(5.52)表明时间变量 t 展缩 a 对应的频率变量 ω 展缩 $1/a$ 倍，同时幅度 $X(\omega/a)$ 乘以 $1/|a|$。因此信号的时域压缩($a>1$)其频域展宽，时域展宽($a<1$)将会使频域压缩。

E. 时间翻转

$$x(-t) \leftrightarrow X(-\omega) \tag{5.53}$$

可见，$x(t)$时域翻转导致 $X(\omega)$频率轴翻转。式(5.53)可由式(5.52)中令 $a=-1$ 得到。

F. 对偶(对称)

$$X(t) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega) \tag{5.54}$$

傅里叶变换的对偶性是很有意义的公式。利用这一性质由式(5.54)计算一次即可得到傅里叶变换对两边信号的傅里叶变换(习题 5.20 和 5.22)。

G. 时域微分

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega X(\omega) \tag{5.55}$$

式(5.52)表明时域微分，频域 $X(\omega)$乘以 $j\omega$(习题 5.28)。

H. 频域微分

$$(-jt)x(t) \leftrightarrow \frac{dX(\omega)}{d\omega} \tag{5.56}$$

式(5.56)是式(5.55)的对偶。

I. 时域积分

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \leftrightarrow \pi X(0)\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}X(\omega) \tag{5.57}$$

积分是微分的逆运算，式(5.57)表明时域积分对应频域乘以 $1/j\omega$。如果积分输出含有直流分量，则需要考虑附加项。因此除了 $X(0)=0$ 外，积分将产生直流分量(习题 5.33)。

J. 卷积

$$x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow X_1(\omega)X_2(\omega) \tag{5.58}$$

式(5.58)称为时域卷积定理，它表明时域作卷积对应频域相乘(习题 5.31)。如同在拉普拉斯变换中一样，卷积性质在连续时间 LTI 系统的研究起着重要作用。它也是我们讨论滤波器的基础(5.5 节)。

K. 乘积

$$x_1(t)x_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}X_1(\omega) * X_2(\omega) \tag{5.59}$$

式(5.59)乘积性质是式(5.58)的对偶，称为频域卷积定理，它表明时域的乘法对应频域的卷积(习题 5.35)。

L. 其他特性

如果 $x(t)$是实数，令

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t) \tag{5.60}$$

式中 $x_e(t)$和 $x_o(t)$分别是 $x(t)$的偶分量和奇分量。

设 $$x(t) \leftrightarrow X(\omega) = A(\omega) + jB(\omega)$$

则
$$X(-\omega) = X^*(\omega) \tag{5.61a}$$
$$x_e(t) \leftrightarrow \mathrm{Re}[X(\omega)] = A(\omega) \tag{5.61b}$$
$$x_o(t) \leftrightarrow j\mathrm{Im}[X(\omega)] = jB(\omega) \tag{5.61c}$$

$x(t)$为实数是式(5.61a)的充分必要条件(习题5.39)。式(5.61b)和(5.61c)表明一个偶信号的傅里叶变换是 ω 的实函数,一个奇信号的傅里叶变换是 ω 的纯虚函数。

M.帕斯瓦尔定律

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\lambda)X_2(\lambda)d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(\lambda)x_2(\lambda)d\lambda \tag{5.62}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)x_2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X_1(\omega)X_2(-\omega)d\omega \tag{5.63}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega \tag{5.64}$$

式(5.64)称为帕斯瓦尔恒等式(或帕斯瓦尔定理)。注意,式(5.64)等号左边为 $x(t)$的标准能量[式(1.14)]。帕斯瓦尔恒等式告诉我们能量 E 可以由 $|X(\omega)|^2$ 的积分得到。$|X(\omega)|^2$称为 $x(t)$的能量谱,式(5.64)也称为能量定理。

表5-1汇总了本节傅里叶变换的性质,表5-2给出了常用信号的傅里叶变换。

表5-1 傅里叶变换的性质

性 质	信 号	傅里叶变换
	$x(t)$	$X(\omega)$
	$x_1(t)$	$X_1(\omega)$
	$x_2(t)$	$X_2(\omega)$
线性	$a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$	$a_1X_1(\omega) + a_2X_2(\omega)$
时移	$x(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}X(\omega)$
频移	$e^{j\omega_0 t}x(t)$	$X(\omega-\omega_0)$
时间扩展	$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
时间翻转	$x(-t)$	$X(-\omega)$
对偶(对称)	$X(t)$	$2\pi x(-\omega)$
时域微分	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega X(\omega)$
频域微分	$(-jt)x(t)$	$\frac{dX(\omega)}{d\omega}$
时域积分	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\pi X(0)\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}X(\omega)$
卷积	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(\omega)X_2(\omega)$
乘积	$x_1(t)x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}X_1(\omega) * X_2(\omega)$
实信号	$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$	$X(\omega) = A(\omega) + jB(\omega)$
		$X(-\omega) = X^*(\omega)$
偶分量	$x_e(t)$	$\mathrm{Re}[X(\omega)] = A(\omega)$
奇分量	$x_o(t)$	$j\mathrm{Im}[X(\omega)] = jB(\omega)$
帕斯瓦尔定律	$\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(\lambda)X_2(\lambda)d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} X_1(\lambda)x_2(\lambda)d\lambda$	
	$\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)x_2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X_1(\omega)X_2(-\omega)d\omega$	
	$\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert x(t)\rvert^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert X(\omega)\rvert^2 d\omega$	

表 5-2　常用傅里叶变换

$x(t)$	$X(\omega)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
1	$2\pi\delta(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
$\cos\omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$
$\sin\omega_0 t$	$-j\pi[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$
$u(t)$	$\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$
$u(-t)$	$\pi\delta(\omega)-\frac{1}{j\omega}$
$e^{-at}u(t), a>0$	$\frac{1}{j\omega+a}$
$te^{-at}u(t), a>0$	$\frac{1}{(j\omega+a)^2}$
$e^{-a\|t\|}, a>0$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$
$\frac{1}{a^2+t^2}$	$e^{-a\|\omega\|}$
$e^{-at^2}, a>0$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\omega^2/4a}$
$p_a(t)=\begin{cases}1 & \|t\|<a\\0 & \|t\|>a\end{cases}$	$2a\frac{\sin\omega a}{\omega a}$
$\frac{\sin at}{\pi t}$	$p_a(\omega)=\begin{cases}1 & \|\omega\|<a\\0 & \|\omega\|>a\end{cases}$
$\mathrm{sgn}t$	$\frac{2}{j\omega}$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)$	$\omega_0\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_0), \omega_0=\frac{2\pi}{T}$

5.5　连续时间 LTI 系统的频率响应

A. 频域响应

在 2.2 节我们已经知道一个连续时间 LTI 系统的输出 $y(t)$等于输入 $x(t)$和脉冲响应 $h(t)$的卷积。

即
$$y(t) = x(t) * h(t) \tag{5.65}$$

由卷积定理式(5.58), 可得
$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) \tag{5.66}$$

这里 $Y(\omega), X(\omega), H(\omega)$分别是 $y(t), x(t), h(t)$的傅里叶变换。从式(5.66)可推得:
$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \tag{5.67}$$

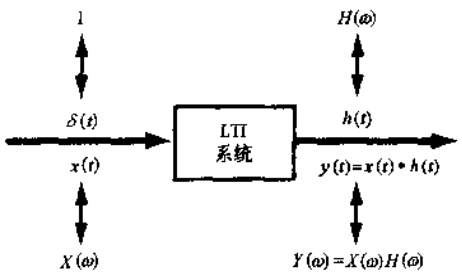


图 5-3　LTI 系统输入和输出之间的关系

$H(\omega)$称做系统的频率响应。式(5.65)和(5.66)所表示的关系见图 5-3。若令
$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\theta_H(\omega)} \tag{5.68}$$
则$|H(\omega)|$被称为幅度响应, $\theta_H(\omega)$被称做相位响应。

对于复指数信号
$$x(t) = e^{j\omega_0 t} \tag{5.69}$$
其傅里叶变换式为(习题 5.23)

$$X(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \tag{5.70}$$

由式(5.66)和(1.26)可以得到

$$Y(\omega) = 2\pi H(\omega_0)\delta(\omega - \omega_0) \tag{5.71}$$

对 $Y(\omega)$做傅里叶反变换,可得

$$y(t) = H(\omega_0)e^{j\omega_0 t} \tag{5.72}$$

它表明复指数信号 $e^{j\omega_0 t}$是 LTI 系统特征值为 $H(\omega_0)$的特征函数,正如第 2 章 2.5 节和习题 2.17 所述。此外,根据式(5.49)的线性性质,如果输入信号 $x(t)$是周期性的,用傅里叶级数表示为

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \tag{5.73}$$

则相应的输出信号 $y(t)$也是周期性的,其傅里叶级数表示为

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k H(k\omega_0)e^{jk\omega_0 t} \tag{5.74}$$

如果 $x(t)$是非周期的,根据式(5.30)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{-\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{5.75}$$

那么根据式(5.66),相应的输出信号 $y(t)$可以表达成

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} H(\omega)X(\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{5.76}$$

这样,连续时间 LTI 系统的频域特性完全可以用频率响应 $H(\omega)$描述。令

$$X(\omega) = |X(\omega)|e^{j\theta_X(\omega)} \qquad Y(\omega) = |Y(\omega)|e^{j\theta_Y(\omega)} \tag{5.77}$$

则由式(5.66)可以得

$$|Y(\omega)| = |X(\omega)||H(\omega)| \tag{5.78a}$$

$$\theta_Y(\omega) = \theta_X(\omega) + \theta_H(\omega) \tag{5.78b}$$

因此,输入信号的幅度谱$|X(\omega)|$与系统的幅频特性$|H(\omega)|$相乘就可以得到输出信号的幅度谱$|Y(\omega)|$。同时,系统的相频特性 $\theta_H(\omega)$与输入信号的相位谱 $\theta_X(\omega)$相加即得输出信号的相位谱 $\theta_Y(\omega)$。幅频特性$|H(\omega)|$有时也被称为系统的增益。

B. 无失真传输

无失真传输是指一个确定信号通过系统后,其时域波形未改变,仅幅度产生变化、在时间上有所延迟。若设 $x(t)$为输入,则无失真传输的输出应为:

$$y(t) = Kx(t - t_d) \tag{5.79}$$

式中 t_d 是时间延迟,K(>0)是增益常数,如图 5-4(a)和(b)所示。将式(5.79)两边同时做傅里叶变换,可得

$$Y(\omega) = Ke^{-j\omega t_d}X(\omega) \tag{5.80}$$

根据式(5.66)可见,无失真传输系统必须满足:

$$H(\omega) = |H(\omega)|e^{j\theta_H(\omega)} = Ke^{-j\omega t_d} \tag{5.81}$$

即

$$|H(\omega)| = K \tag{5.82a}$$

$$\theta_H(\omega) = -j\omega t_d \tag{5.82b}$$

也就是说,$H(\omega)$的幅度必须是一个与频率无关的常数,相位必须是频率的线性函数。如图 5-4(c)和(d)所示。

幅度失真和相位失真

当系统的幅度谱$|H(\omega)|$在我们所研究的频带内不是一个常数时,输入信号的频率分量在传输中就会被做不同的加权,这种影响叫做幅度失真。当相位谱 $\theta_H(\omega)$不是频率的线性函数时,由于系统对输入信号各频率分量的不同延时,致使输出信号和输入信号的波形不同,这

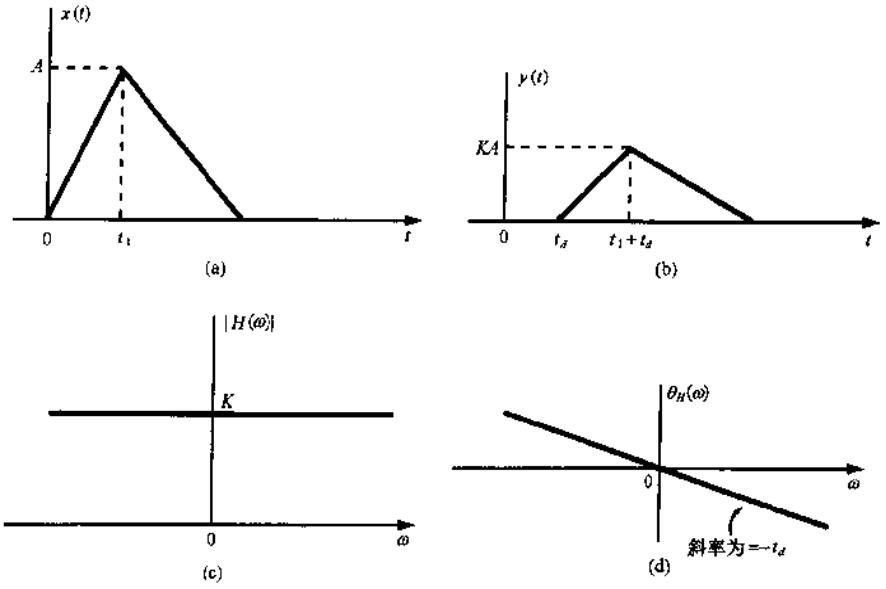


图 5-4　无失真传输

种失真叫做相位失真。

C. 微分方程描述的 LTI 系统

正如在 2.5 节中所讨论的那样，许多实际中的连续时间 LTI 系统可以用线性常系数微分方程来描述：

$$\sum_{k=0}^{N} a^k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b^k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \tag{5.83}$$

式中 $M \leqslant N$，将式(5.83)两边做傅里叶变换，应用式(5.49)线性性质和式(5.55)时域微分性质，可得

$$\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k Y(\omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k X(\omega)$$

即

$$Y(\omega) \sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k = X(\omega) \sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k \tag{5.84}$$

这样，由式(5.67)

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k} \tag{5.85}$$

式(5.85)是 ω 的有理函数，它与拉普拉斯变换中式(3.40)定义的 $H(s) = Y(s)/X(s)$ 相对应，只要令 $s = j\omega$，二者就完全一样了，即

$$H(\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega} = H(j\omega)$$

5.6　滤波

滤波是所有的信号处理系统中最基本的一种处理手段。滤波就是改变信号某些频率分量的幅度或滤除某些频率分量。正如我们前面所说的，对于连续 LTI 系统，输出频谱是输入频谱与系统频率响应相乘得来的，因此，一个 LTI 系统对输入信号来说就相当于一个滤波器。这里“滤波”二字是指系统所起到的频率选择作用。

A. 理想频率选择滤波器

一个理想频率选择滤波器可以让信号的指定频带全部通过而其他频带全部截止。允许通

过的频带叫做通带，截止的频带叫做阻带。

下面介绍几种最常见的理想频率选择滤波器。

1. 理想低通滤波器

理想低通滤波器(LPF)可描述为

$$|H(\omega)|=\begin{cases}1 & |\omega|<\omega_c\\ 0 & |\omega|>\omega_c\end{cases} \tag{5.86}$$

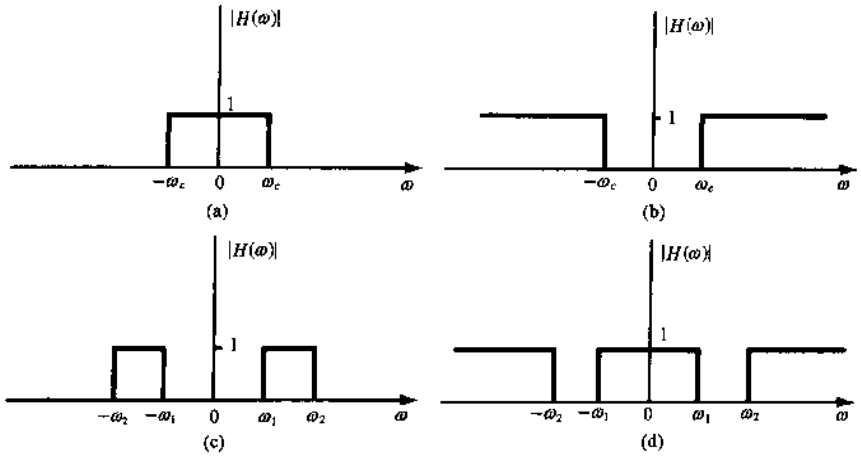


图5-5　理想频率选择滤波器的幅频特性

ω_c 是截止频率，如图5-5(a)所示。

2. 理想高通滤波器

理想高通滤波器(HPF)可描述为

$$|H(\omega)|=\begin{cases}0 & |\omega|<\omega_c\\ 1 & |\omega|>\omega_c\end{cases} \tag{5.87}$$

如图5-5(b)所示。

3. 理想带通滤波器

理想带通滤波器(BPF)可描述为

$$|H(\omega)|=\begin{cases}1 & \omega_1<|\omega|<\omega_2\\ 0 & \text{其他}\end{cases} \tag{5.88}$$

如图5-5(c)所示。

4. 理想带阻滤波器

理想带阻滤波器(BSF)可描述为

$$|H(\omega)|=\begin{cases}0 & \omega_1<|\omega|<\omega_2\\ 1 & \text{其他}\end{cases} \tag{5.89}$$

如图5-5(d)所示。

在上面的介绍中，我们没有考虑滤波器的相频特性。为了避免在滤波过程中的相位失真，滤波器在整个通频带内还必须具备线性相位特性，即式(5.82b)

$$\theta_H(\omega)=-\omega t_d \tag{5.90}$$

式中 t_d 是常数。

注意，所有的理想频率选择器都是非因果系统。

B. 非理想频率选择滤波器

我们以图5-6(a)所示的 RC 滤波器为例加以介绍，这是一种简单的连续时间因果频率选择器，其输出 $y(t)$ 和输入 $x(t)$ 的关系为(习题1.32)

$$RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

上式两边同时做傅里叶变换，可得到 RC 滤波器的频响特性

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{H(\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_0} \tag{5.91}$$

式中 $\omega_0 = 1/RC$。由此可得幅频特性 $|H(\omega)|$ 和相频特性 $\theta_H(\omega)$ 分别为

$$|H(\omega)| = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_0} = \frac{1}{[1 + (\omega/\omega_0)^2]^{1/2}} \tag{5.92}$$

$$\theta_H(\omega) = -\arctan\frac{\omega}{\omega_0} \tag{5.93}$$

特性曲线绘于图 5-6(b)。从图可以看到，图 5-6(a)中的 RC 网络是低通滤波器。

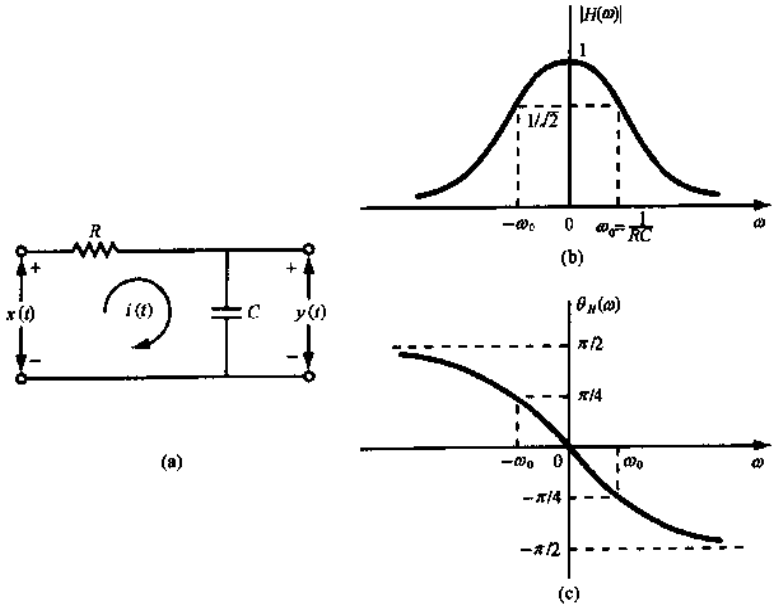


图 5-6　RC 滤波器及其频响特性

5.7　带宽

A. 滤波器(或系统)的带宽

系统分析中一个重要的概念便是 LTI 系统的带宽。系统的带宽有许多不同的定义。

1. 绝对带宽

理想低通滤波器的带宽 W_B 等于它的截频即 $W_B = \omega_C$[见图 5-5(a)]，在这里 W_B 叫做绝对带宽。理想带通滤波器的绝对带宽是 $W_B = \omega_2 - \omega_1$[见图 5-5(c)]。如果 $W_B \ll \omega_0$，则带通滤波器称为窄带滤波器。这里 $\omega_0 = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$，是滤波器的中心频率。高通滤波器和带阻滤波器则没有带宽的定义。

2. 3dB(或半功率)带宽

对于因果或实际滤波器，带宽的常见定义是 3dB 带宽 W_{3dB}。就低通滤波器而言，如式(5.92)及图 5-6(b)中所描述的 RC 滤波器，3dB 带宽定义为：幅度谱 $|H(\omega)|$ 值下降为 $\frac{|H(0)|}{\sqrt{2}}$ 时的正频率，如图 5-7(a)所示。式中 $H(0)$ 是低通 RC 滤波器 $H(\omega)$ 的峰值。3dB 带宽也叫做半功率带宽，这是因为电压或电流衰减为 3dB 等于有效功率除以 2。对带通滤波器而言，3dB 带宽定义为 $|H(\omega)|$ 下降为峰值 $|H(\omega_m)|\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍时所对应频率的差值，如图 5-7(b)所示。3dB

带宽对幅频特性为单峰(在正频率范围内)的系统非常有用,它是测量系统带宽普遍采用的标准。但当系统幅频特性有多个峰值时,3dB 带宽就不明确且不惟一了。

注意,上面介绍的带宽定义域为正频率轴且要求频率为正数。

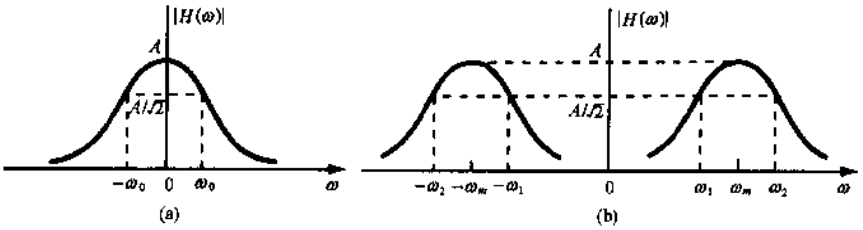


图 5-7 滤波器带宽

B. 信号带宽

信号的带宽定义为:能量或功率最集中的正频率范围。由此可以得出多种不同的带宽定义方式。(习题 5.57 和 5.76)。

3dB 带宽

信号 $x(t)$的带宽可以采用滤波器带宽的定义方式,如以信号幅度谱$|X(\omega)|$表示的 3dB 带宽。实际上,只要将图 5-5(a)到图 5-5(c)中$|H(\omega)|$用$|X(\omega)|$代替,就可得到低通、高通和带通信号的频域曲线。

有限带宽信号

如果

$$|X(\omega)| = 0 \qquad |\omega| > \omega_M \tag{5.94}$$

则信号 $x(t)$称为有限带宽信号。由此,有限带宽信号的带宽便自然面然就是 ω_M 了。

习 题 解 答

傅里叶级数

5.1 如果信号集$\{\Psi_n(t)\}$的任意两个子集 $\Psi_m(t)$和 $\Psi_k(t)$在(a,b)区间满足

$$\int_a^b \Psi_m(t)\Psi_k^*(t)dt = \begin{cases} 0 & m \neq k \\ \alpha & m = k \end{cases} \tag{5.95}$$

则称信号集$\{\Psi_n(t)\}$为正交信号集,式中 * 表示共轭,而且 $\alpha \neq 0$。证明间隔为周期 T_0 整数倍的复指数集$\{e^{jm\omega_0 t}: k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$是正交的,其中 $T_0 = 2\pi/\omega_0$。

[redacted] 对于任意 t_0 有

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{jm\omega_0 t}dt = \frac{1}{jm\omega_0} e^{jm\omega_0 t}\Big|_{t_0}^{t_0+T_0} = \frac{1}{jm\omega_0}\left(e^{jm\omega_0(t_0+T_0)} - e^{jm\omega_0 t_0}\right)$$

$$= \frac{1}{jm\omega_0} e^{jm\omega_0 t_0}\left(e^{jm2\pi} - 1\right) = 0 \qquad m \neq 0 \tag{5.96}$$

因为 $e^{jm2\pi} = 1$,当 $m = 0$ 时,$e^{jm\omega_0 t}|_{m=0} = 1$ 且

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{jm\omega_0 t}dt = \int_{t_0}^{t_0+T_0} dt = T_0 \tag{5.97}$$

于是,由式(5.96)和(5.97)可以得出

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{jm\omega_0 t}\left(e^{jm\omega_0 t}\right)^* dt = \int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{j(m-k)\omega_0 t}dt = \begin{cases} 0 & m \neq k \\ T_0 & m = k \end{cases} \tag{5.98}$$

即间隔为周期 T_0 整数倍的复指数集$\{e^{jm\omega_0 t}: k = 0, \pm 1, \pm 2\}$是正交的。

5.2 利用式(5.98)的正交条件推导式(5.5)傅里叶系数。

[redacted] 由式(5.4)

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{jk\omega_0 t}\qquad \omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$$

公式两边同时乘以 $e^{-jm\omega_0 t}$，再从 t_0 到(t_0+T_0)进行积分，可得

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0}x(t)e^{-jm\omega_0 t}dt=\int_{t_0}^{t_0+T_0}\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k e^{jk\omega_0 t}\right)e^{-jm\omega_0 t}dt$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k\int_{t_0}^{t_0+T_0}e^{j(k-m)\omega_0 t}dt \tag{5.99}$$

再由式(5.98)，式(5.99)可以化简为

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0}x(t)e^{-jm\omega_0 t}dt=c_m T_0 \tag{5.100}$$

把下标 m 换成 k 可得

$$c_k=\frac{1}{T_0}\int_{t_0}^{t_0+T_0}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \tag{5.101}$$

取 $t_0=0$ 和 $t_0=-T_0/2$ 是式(5.101)最常用的两种情况，即

$$c_k=\frac{1}{T_0}\int_{0}^{T_0}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \tag{5.102a}$$

$$c_k=\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \tag{5.102b}$$

5.3 由式(5.4)指数傅里叶幂级数推导式(5.8)三角傅里叶级数。

[redacted] 整理式(5.4)得

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{jk\omega_0 t}=c_0+\sum_{k=1}^{\infty}(c_k e^{jk\omega_0 t}+c_{-k}e^{-jk\omega_0 t})$$

利用欧拉公式 $e^{\pm jk\omega_0 t}=\cos k\omega_0 t\pm j\sin k\omega_0 t$ 可得

$$x(t)=c_0+\sum_{k=1}^{\infty}[(c_k+c_{-k})\cos k\omega_0 t+j(c_k-c_{-k})\sin k\omega_0 t] \tag{5.103}$$

设

$$c_0=\frac{a_0}{2}\qquad c_k+c_{-k}=a_k\qquad j(c_k-c_{-k})=b_k \tag{5.104}$$

式(5.103)变为

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\omega_0 t+b_k\sin k\omega_0 t)$$

5.4 求下列信号的指数傅里叶幂级数表示。

(a) $x(t)=\cos\omega_0 t$

(b) $x(t)=\sin\omega_0 t$

(c) $x(t)=\cos\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)$

(d) $x(t)=\cos 4t+\sin 6t$

(e) $x(t)=\sin^2 t$

[redacted] (a)不必用式(5.5)计算复傅里叶系数 c_k，直接用欧拉公式可得

$$\cos\omega_0 t=\frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t})=\frac{1}{2}e^{j\omega_0 t}+\frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{jk\omega_0 t}$$

由此可得 $\cos\omega_0 t$ 的复傅里叶系数为

$$c_1=\frac{1}{2}\qquad c_{-1}=\frac{1}{2}\qquad c_k=0,\qquad |k|\neq 1$$

(b) 同理可得

$$\sin\omega_0 t=\frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t})=\frac{1}{2j}e^{-j\omega_0 t}+\frac{1}{2j}e^{j\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{jk\omega_0 t}$$

所以，$\sin\omega_0 t$ 的复傅里叶系数为

$$c_1=\frac{1}{2j}\qquad c_{-1}=-\frac{1}{2j}\qquad c_k=0,\quad |k|\neq 1$$

(c) $x(t)$的基本角频率是2，因此

$$x(t)=\cos\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{jk\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{j2kt}$$

$$x(t)=\cos\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{j(2t+\pi/4)}+e^{-j(2t+\pi/4)}\right)$$

$$=\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{-j2t}+\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{-j2t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{j2kt}$$

所以，$\cos\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)$的复傅里叶系数是

$$c_1=\frac{1}{2}e^{j\pi/4}=\frac{1}{2}\frac{1-j}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}(1+j)$$

$$c_{-1}=\frac{1}{2}e^{-j\pi/4}=\frac{1}{2}\frac{1-j}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}(1-j)$$

$$c_k=0\qquad |k|\neq 1$$

(d)由习题1.14可以判定$x(t)$的基本周期T_0是π，且$\omega_0=2\pi/T_0=2$

所以　　$x(t)=\cos 4t+\sin 6t=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{jk\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{j2kt}$

再代入欧拉公式可得

$$x(t)=\cos 4t+\sin 6t=\frac{1}{2}(e^{j4t}+e^{-j4t})+\frac{1}{2j}(e^{j6t}-e^{-j6t})$$

$$=-\frac{1}{2j}e^{-j6t}+\frac{1}{2}e^{-j4t}+\frac{1}{2}e^{j4t}+\frac{1}{2j}e^{j6t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{j2kt}$$

故$\cos 4t+\sin 6t$的复傅里叶系数为

$$c_{-3}=-\frac{1}{2j}\qquad c_{-2}=\frac{1}{2}\qquad c_2=\frac{1}{2}\qquad c_3=\frac{1}{2j}$$

其余$c_k=0$

(e)由习题1.16可得$x(t)$的基本周期T_0是π，且$\omega_0=2\pi/T_0=2$。

所以　　$x(t)=\sin^2 t=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{jk\omega_0 t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{j2kt}$

再代入欧拉公式可得

$$x(t)=\sin^2 t=\left(\frac{e^{jt}-e^{-jt}}{2j}\right)^2=-\frac{1}{4}(e^{j2t}-2+e^{-j2t})$$

$$=-\frac{1}{4}e^{-j2t}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}e^{j2t}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{j2kt}$$

故$\sin^2 t$的复傅里叶系数为

$$c_{-1}=-\frac{1}{4}\qquad c_0=\frac{1}{2}\qquad c_1=-\frac{1}{4}$$

其余$c_k=0$。

5.5　给定周期方波$x(t)$如图5-8所示。

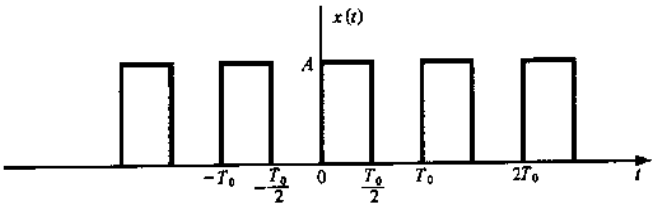


图5-8

(a) 求$x(t)$指数傅里叶级数。

(b) 求$x(t)$三角傅里叶级数。

[redacted] (a)令　　$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{jk\omega_0 t}\qquad \omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$

由式(5.102a)得

$$c_k=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt=\frac{1}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}}Ae^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$= \frac{A}{-jk\omega_0 T_0} e^{-jk\omega_0 t}\Big|_0^{\frac{T_0}{2}} = \frac{A}{-jk\omega_0 T_0}(e^{-jk\omega_0 T_0/2} - 1)$$

$$= \frac{A}{jk2\pi}(1 - e^{-jk\pi}) = \frac{A}{jk2\pi}[1 - (-1)^k]$$

因为 $\omega_0 T_0 = 2\pi$ 且 $e^{-jk\pi} = (-1)^k$，所以

$$c_k = 0 \qquad k = 2m \neq 0$$

$$c_k = \frac{A}{jk\pi} \qquad k = 2m + 1$$

$$c_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0/2} Adt = \frac{A}{2}$$

因此

$$c_0 = \frac{A}{2} \qquad c_{2m} = 0 \qquad c_{2m+1} = \frac{A}{j(2m+1)\pi} \tag{5.105}$$

故可得

$$x(t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{j\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2m+1} e^{j(2m+1)\omega_0 t} \tag{5.106}$$

(b)由式(5.105)、(5.10)和(5.12)可得

$$\frac{a_0}{2} = c_0 = \frac{A}{2} \qquad a_{2m} = b_{2m} = 0, m \neq 0$$

$$a_{2m+1} = 2\mathrm{Re}[c_{2m+1}] = 0 \qquad b_{2m+1} = -2\mathrm{Im}[c_{2m+1}] = \frac{2A}{(2m+1)\pi}$$

把这些值代入式(5.8)可得

$$x(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\sin(2m+1)\omega_0 t$$

$$= \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi}\left(\sin\omega_0 t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5}\sin 5\omega_0 t + \cdots\right) \tag{5.107}$$

5.6 给定周期方波如图 5-9 所示。

(a)求 $x(t)$指数傅里叶级数。

(b)求 $x(t)$三角傅里叶级数。

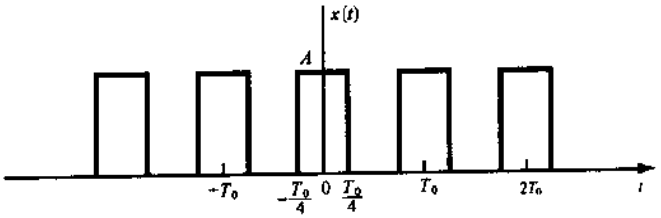


图 5-9

[redacted] (a)设

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

由式(5.102b)可得

$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{4}}^{\frac{T_0}{4}} Ae^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$= \frac{A}{-jk\omega_0 T_0}(e^{-jk\omega_0 T_0/4} - e^{jk\omega_0 T_0/4})$$

$$= \frac{A}{-jk2\pi}(e^{-jk\pi/2} - e^{jk\pi/2}) = \frac{A}{k\pi}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

所以

$$c_k = 0 \qquad k = 2m \neq 0$$

$$c_k = (-1)^m \frac{A}{k\pi} \qquad k = 2m + 1$$

$$c_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = \frac{1}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} Adt = \frac{A}{2}$$

于是

$$c_0 = \frac{A}{2} \qquad c_{2m} = 0, m \neq 0 \qquad c_{2m+1} = (-1)^m \frac{A}{(2m+1)\pi} \tag{5.108}$$

故可得

$$x(t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} e^{j(2m+1)\omega_0 t} \tag{5.109}$$

(b)由式(5.108)、(5.10)和(5.12)可得

$$\frac{a_0}{2} = c_0 = \frac{A}{2} \qquad a_{2m} = 2\mathrm{Re}[c_{2m}] = 0, m \neq 0$$

$$a_{2m+1} = 2\mathrm{Re}[c_{2m+1}] = (-1)^m \frac{2A}{(2m+1)\pi} \qquad b_k = -2\mathrm{Im}[c_k] = 0$$

把它们代入式(5.8)，得

$$x(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m-1}\cos(2m+1)\omega_0 t$$

$$= \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi}\left(\cos\omega_0 t - \frac{1}{3}\cos 3\omega_0 t + \frac{1}{5}\cos 5\omega_0 t - \cdots\right) \tag{5.110}$$

注意 $x(t)$是偶函数，所以 $x(t)$只含有直流项和余弦项。此外图 5-9 所示 $x(t)$可以由图 5-8 中的 $x(t)$左移$\frac{T_0}{4}$得到。

5.7 给定周期方波如图 5-10 所示。

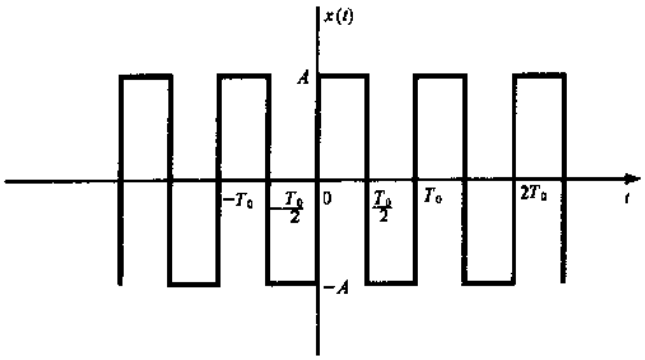


图 5-10

(a)求 $x(t)$指数傅里叶级数。

(b)求 $x(t)$三角傅里叶级数。

[redacted] 由图看出，$x(t)$可表示为

$$x(t) = x_1(t) - A$$

式中的 $x_1(t)$如图 5-11 所示。比较图 5-11 和习题 5.5 中图 5-8，可以发现除了 A 变成 $2A$ 外，$x_1(t)$与图 5-8 中的 $x(t)$方波相同。

(a)把式(5.106)中的 A 换成 $2A$ 可得

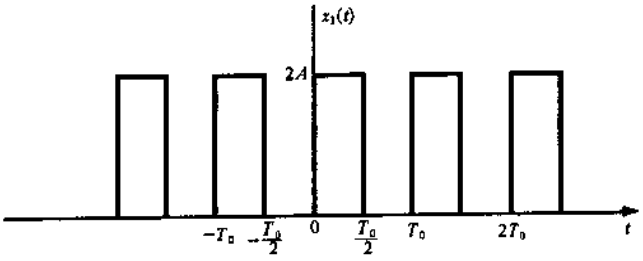


图 5-11

$$x_1(t) = A + \frac{2A}{j\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2m+1}e^{j(2m+1)\omega_0 t}$$

所以

$$x(t) = x_1(t) - A = \frac{2A}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2m+1}e^{j(2m+1)\omega_0 t} \tag{5.111}$$

(b)同理，把式(5.107)中的 A 换成 $2A$ 可得

$$x_1(t) = A + \frac{4A}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2m+1}\sin(2m+1)\omega_0 t$$

所以

$$x(t) = \frac{4A}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2m+1}\sin(2m+1)\omega_0 t$$

$$= \frac{4A}{\pi}\left(\sin\omega_0 t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5}\sin 5\omega_0 t + \cdots\right) \tag{5.112}$$

注意 $x(t)$是奇数，所以 $x(t)$只含有正弦项。

5.8 图 5-12 中给出冲激序列 $\delta_{T_0}(t)$，其表达式为：

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(t - kT_0) \tag{5.113}$$

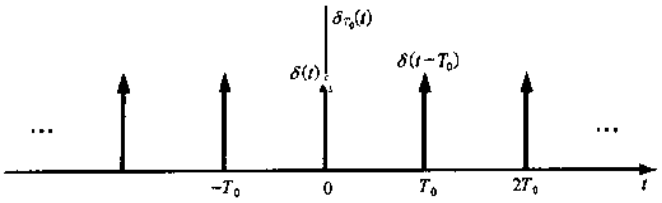


图 5-12

(a)求 $\delta_{T_0}(t)$的指数傅里叶级数。

(b)求 $\delta_{T_0}(t)$的三角傅里叶级数。

[redacted] (a)设

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{jk\omega_0 t} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

为使积分区间包含 $\delta(t)$，采用式(5.102b)来推导傅里叶系数，可得

$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}\delta(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T_0} \tag{5.114}$$

于是有

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t - kT_0) = \frac{1}{T_0}e^{jk\omega_0 t} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \tag{5.115}$$

(b)设

$$\delta_{T_0}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\omega_0 t + b_k\sin\omega_0 t) \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

因为 $\delta_{T_0}(t)$是偶函数，$b_k = 0$，由式(5.9a)得 a_k 的值为

$$a_k = \frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}\delta(t)\cos k\omega_0 t dt = \frac{2}{T_0} \tag{5.116}$$

所以

$$\delta_{T_0}(t) = \frac{1}{T_0} + \frac{2}{T_0}\sum_{k=1}^{\infty}\cos k\omega_0 t \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \tag{5.117}$$

5.9 图 5-13(a)给出三角波 $x(t)$。用不同方法求(a)$x(t)$的指数傅里叶级数，(b)$x(t)$的三角傅里叶级数。

[redacted] 三角波 $x(t)$的导数 $x'(t)$是方波，如图 5-13(b)所示。

(a)设

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{jk\omega_0 t} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \tag{5.118}$$

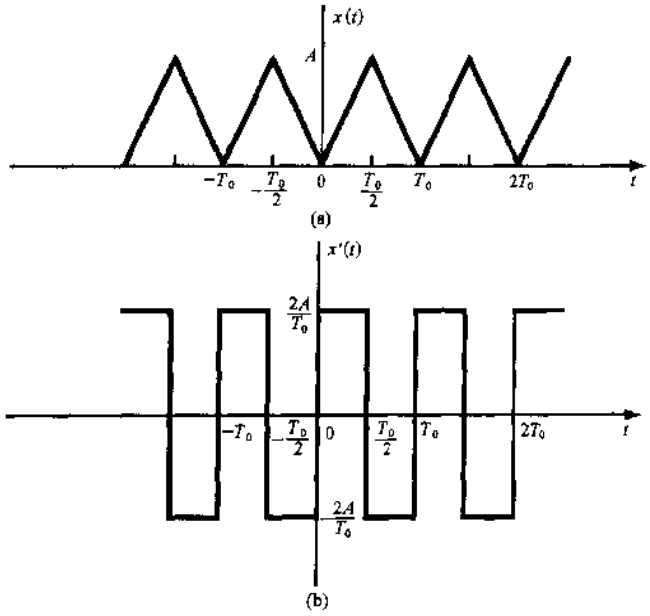


图 5-13

对式(5.118)求导，可得

$$x'(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} jk\omega_0 c_k e^{jk\omega_0 t} \tag{5.119}$$

式(5.119)说明，$x'(t)$的傅里叶系数等于 $jk\omega_0 c_k$。因此如果我们求出了 $x'(t)$的傅里叶系数，则 $c_k(k \neq 0)$便可求得。c_0 不能由式(5.119)得出而必须由式(5.6)直接计算。比较图 5-13(b)与 5-10，可以发现除了把 A 换成$\frac{2A}{\pi}$外，$x'(t)$与 $x(t)$完全相同。因此，把式(5.111)中的 A 换成$\frac{2A}{\pi}$即可得

$$x'(t) = \frac{4A}{j\pi T_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2m+1} e^{j(2m+1)\omega_0 t} \tag{5.120}$$

令式(5.119)等于式(5.120)可得

$$c_k = 0 \qquad k = 2m \neq 0$$

$$jk\omega_0 c_k = \frac{4A}{jk\pi T_0} \quad \text{或} \quad c_k = -\frac{2A}{\pi^2 k^2} \qquad k = 2m+1$$

从图 5-13(a)和式(5.6)可得：

$$c_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = \frac{A}{2}$$

把这些值代入式(5.118)可得

$$x(t) = \frac{A}{2} - \frac{2A}{\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} e^{j(2m+1)\omega_0 t} \tag{5.121}$$

(b)同理，对式(5.8)求导可得

$$x'(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k\omega_0 (b_k \cos\omega_0 t - a_k \sin\omega_0 t) \tag{5.122}$$

式(5.112)说明，$x'(t)$的傅里叶余弦系数等于 $n\omega_0 b_k$，正弦系数等于 $-n\omega_0 a_k$。把式(5.112)中的 A 换成 $2A/T_0$，可得

$$x'(t) = \frac{8A}{\pi T_0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \sin(2m+1)\omega_0 t \tag{5.123}$$

令式(5.122)和(5.123)相等，可求出

$$b_k = 0 \qquad a_k = 0 \qquad k = 2m \neq 1$$

$$-k\omega_0 a_k = \frac{8A}{\pi k T_0} \quad \text{或} \quad a_k = \frac{4A}{\pi^2 k^2} \qquad k = 2m+1$$

由式(5.6)、(5.10)和图 5-13(a)可得

$$\frac{a_0}{2} = c_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = \frac{A}{2}$$

把这些值代入式(5.8),得

$$x(t) = \frac{A}{2} - \frac{4A}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2}\cos(2m+1)\omega_0 t \tag{5.124}$$

5.10 用不同方法求图 5-14(a)所示三角波 $x(t)$的三角傅里叶级数。

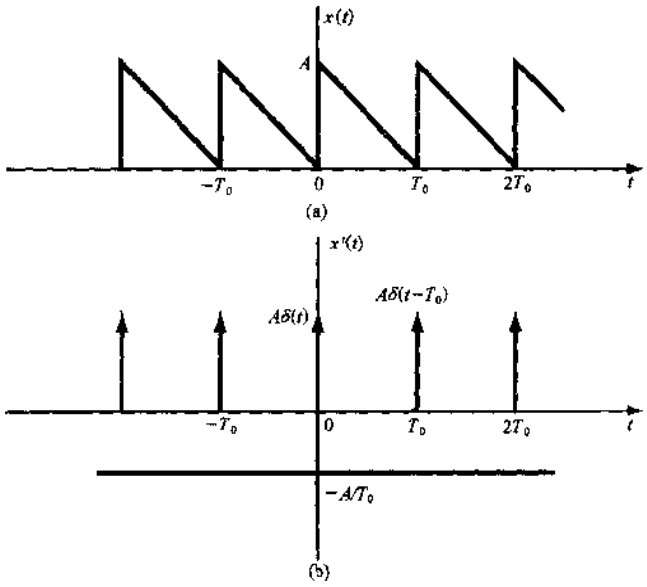


图 5-14

[redacted] 图 5-14(a)所示三角波 $x(t)$的导数 $x'(t)$如图 5-14(b)所示,可表示为

$$x'(t) = -\frac{A}{T_0} + A\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t - kT_0) \tag{5.125}$$

由式(5.117),式(5.125)可写成

$$x'(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2A}{T_0}\cos k\omega_0 t \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \tag{5.126}$$

令式(5.126)和(5.122)相等,可得

$$a_k = 0,\ \neq 0 \qquad k\omega_0 b_k = \frac{2A}{T_0} \quad 或 \quad b_k = \frac{A}{k\pi}$$

由图 5-14(a)和式(5.9a)可得

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)dt = \frac{A}{2}$$

将这些值代入式(5.8),得

$$x(t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin k\omega_0 t \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \tag{5.127}$$

5.11 求图 5-15(a)所示周期方波脉冲信号 $x(t)$的幅度谱,并绘出频谱图。

(a)$d = T_0/4$　　(b)$d = T_0/8$

[redacted] 利用式(5.102a)可得:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{A}{T_0}\int_0^{d} e^{-jk\omega_0 t}dt \\ &= \frac{A}{T_0}\frac{1}{-jk\omega_0}e^{-jk\omega_0 t}\Big|_0^{d} = \frac{A}{T_0 jk\omega_0}(1 - e^{-jk\omega_0 d}) \\ &= \frac{A}{T_0 jk\omega_0}e^{-jk\omega_0 d/2}(e^{jk\omega_0 d/2} - e^{-jk\omega_0 d/2}) \\ &= A\frac{d}{T_0}\frac{\sin(k\omega_0 d/2)}{k\omega_0 d/2}e^{-jk\omega_0 d/2} \end{aligned} \tag{5.128}$$

注意当 $k\omega_0 d/2 = m\pi$ 时,$c_k = 0$,且有

$$m\omega_0 = \frac{m2\pi}{d} \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

(a) $d = T_0/4$, $k\omega_0 d/2 = k\pi d/T_0 = k\pi/4$,

$$|c_k| = \frac{A}{4}\left|\frac{\sin(k\pi/4)}{k\pi/4}\right|$$

其幅度谱如图 5-15(b)所示。

(b) $d = T_0/8$, $k\omega_0 d/2 = k\pi d/T_0 = k\pi/8$,

$$|c_k| = \frac{A}{8}\left|\frac{\sin(k\pi/8)}{k\pi/8}\right|$$

其幅度谱如图 5-15(c)所示。

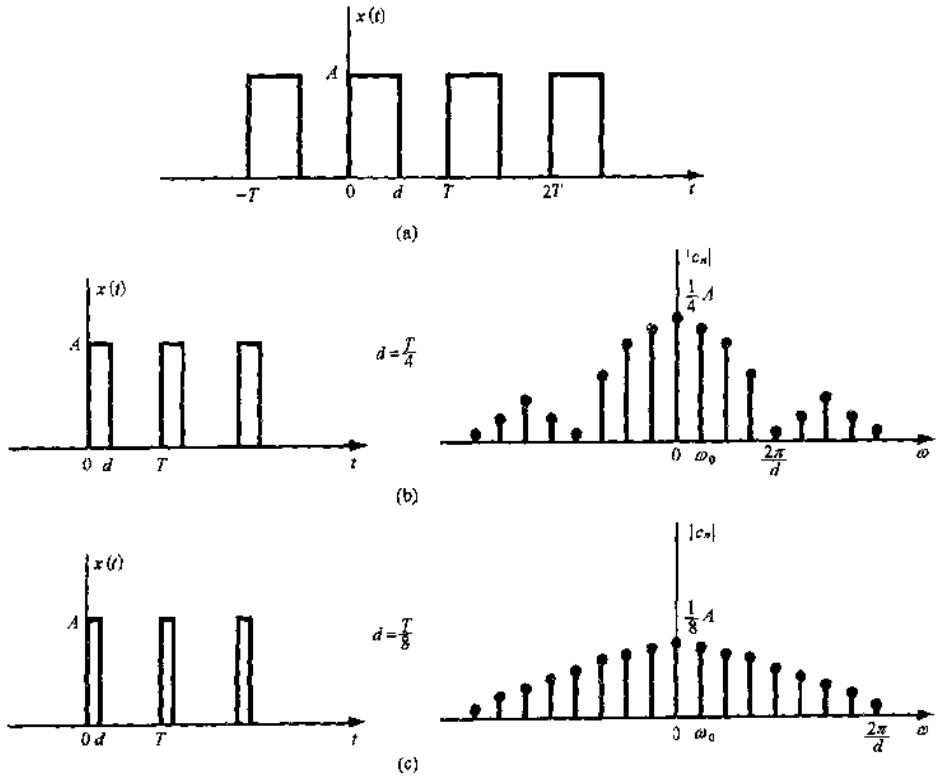


图 5-15

5.12 若 $x_1(t)$和 $x_2(t)$是基波周期为 T_0 的周期信号，它们的指数傅里叶级数表示式为：

$$x_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{jk\omega_0 t} \quad x_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e_k e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

证明信号 $x(t) = x_1(t)x_2(t)$也是基波周期为 T_0 的周期信号，且其表达式为

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

式中

$$c_k = \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m e_{k-m} \tag{5.129}$$

[redacted] 因为

$$x(t + T_0) = x_1(t + T_0)x_2(t + T_0) = x_1(t)x_2(t) = x(t)$$

因此，$x(t)$是基波周期为 T_0 的周期信号。

令

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

则

$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x_1(t)x_2(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m e^{jm\omega_0 t}\right) x_2(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m \left[\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x_2(t)e^{-j(k-m)\omega_0 t}dt\right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m e_{k-m}$$

因为 $$e_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x_2(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

所以括号里的部分等于 e_{k-m}。

5.13 设 $x_1(t)$和 $x_2(t)$是习题5.12中两个周期信号,证明

$$\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x_1(t)x_2(t)dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e_{-k} \tag{5.130}$$

[redacted] 式(5.130)称为周期信号的帕斯瓦尔定理。由习题5.12中的式(5.129)可得

$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x_1(t)x_2(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e_{k-m}$$

令上式中 $k=0$,则有

$$\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x_1(t)x_2(t)dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_m e_{-m} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e_{-k}$$

5.14 证明傅里叶级数的帕斯瓦尔定理为式(5.12),即

$$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

[redacted] 若 $$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

则 $$x^*(t) = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}\right)^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* e^{-jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{-k}^* e^{jk\omega_0 t} \tag{5.131}$$

式中 * 表示共轭。式(5.131)表明若 $x(t)$的傅里叶系数是 c_k,则 $x^*(t)$的傅里叶系数是 c_{-k}^*。若令式(5.130)中 $x_1(t)=x(t)$, $x_2(t)=x^*(t)$,则可得 $d_k=c_k$, $e_k=c_{-k}^*$(或 $e_{-k}=c_k^*$),并可推出

$$\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)x^*(t)dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k c_k^* \tag{5.132}$$

或 $$\frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

5.15 (a)习题2.8中定义了周期卷积 $f(t)=x_1(t)\otimes x_2(t)$。设 d_n 和 e_n 分别是 $x_1(t)$和 $x_2(t)$的复傅里叶系数,证明 $f(t)$的复傅里叶系数 c_k 是

$$c_k = T_0 d_k e_k \tag{5.133}$$

式中 T_0 是 $x_1(t)$, $x_2(t)$和 $f(t)$的基波周期。

(b)求习题2.8中 $f(t)$的指数傅里叶级数。

[redacted] (a)由习题2.8中式(2.70),得

$$f(t) = x_1(t)\otimes x_2(t) = \int_0^{T_0} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau$$

令 $$x_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{jk\omega_0 t} \qquad x_2(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e_k e^{jk\omega_0 t}$$

则 $$f(t) = \int_0^{T_0} x(\tau)\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} e_k e^{jk\omega_0(t-\tau)}\right)d\tau$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e_k e^{jk\omega_0 t}\int_0^{T_0} x(\tau)e^{-jk\omega_0\tau}d\tau$$

因为 $$d_k = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(\tau)e^{-jk\omega_0\tau}d\tau$$

所以 $$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T_0 d_k e_k e^{jk\omega_0 t} \tag{5.134}$$

该式表明 $f(t)$的傅里叶系数 c_k 等于 $T_0 d_k e_k$。

(b)在习题2.8(c)中, $x_1(t)=x_2(t)=x(t)$,如图2-12所示。这与习题5.5图5-8相同。由式(5.105)可得

$$d_0 = e_0 = \frac{A}{2} \qquad d_k = e_k = \begin{cases} 0 & k = 2m, m \neq 0 \\ A/jk\pi & k = 2m+1 \end{cases}$$

因此，由式(5.133)可得 $f(t)$ 的傅里叶系数 c_k 为

$$c_0 = T_0 d_0 e_0 = T_0 A^2/4$$

$$c_k = T_0 d_k e_k = \begin{cases} 0 & k = 2m, m \neq 0 \\ -T_0 A^2/k^2\pi^2 & k = 2m+1 \end{cases}$$

注意，在习题2.8(c)中，图2-13(b)所示的 $f(t) = x_1(t) \otimes x_2(t)$ 与图5-13(a)所示的 $x(t)$ 相对应。因此，把习题5.9结果中的 A 换成 $T_0A^2/2$，可得

$$c_0 = \frac{T_0 A^2}{4} \qquad c_k = \begin{cases} 0 & k = 2m, m \neq 0 \\ -T_0 A^2/k^2\pi^2 & k = 2m+1 \end{cases}$$

该式与使用式(5.133)得到的结论一样。

傅里叶变换

5.16 证明式(5.50)的时移特性，即

$$x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0} X(\omega)$$

[redacted] 由式(5.31)定义

$$\mathcal{F}[x(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t_0) e^{-j\omega t} dt$$

令 $\tau = t - t_0$ 可得

$$\mathcal{F}[x(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\omega(t_0 + \tau)} d\tau$$

$$= e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = e^{-j\omega t_0} X(\omega)$$

因此

$$x(t - t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0} X(\omega)$$

5.17 证明式(5.51)的时移特性，即

$$x(t) e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow X(\omega - \omega_0)$$

[redacted] 由式(5.31)定义

$$\mathcal{F}[x(t) e^{j\omega_0 t}] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j(\omega_0 - \omega)t} dt = X(\omega - \omega_0)$$

因此

$$x(t) e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow X(\omega - \omega_0)$$

5.18 证明式(5.54)的对偶特性，即

$$X(t) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$$

[redacted] 由式(5.32)傅里叶反变换的定义，可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = 2\pi x(t)$$

将 t 换成 $-t$，可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{-j\omega t} d\omega = 2\pi x(-t)$$

将积分变量 t 换成 ω，可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(t) e^{-j\omega t} dt = 2\pi x(-\omega)$$

因为

$$\mathcal{F}[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} X(t) e^{-j\omega t} dt$$

由此可得

$$X(t) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$$

5.19 求图5-16(a)所示矩形脉冲性 $x(t)$ 的傅里叶变换

$$x(t) = p_a(t) = \begin{cases} 1 & |t| < a \\ 0 & |t| > a \end{cases} \tag{5.135}$$

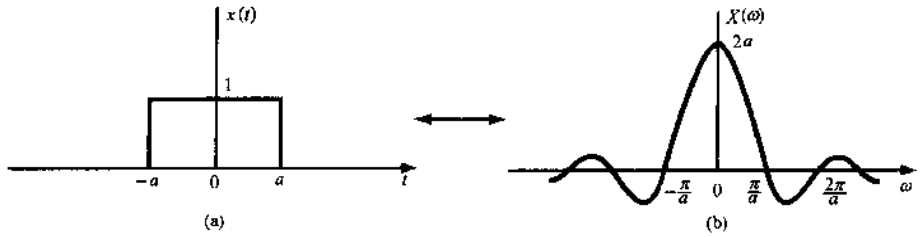


图 5-16　矩形脉冲及其傅里叶变换

解　由式(5.31)

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_a(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-a}^{+a} e^{-j\omega t} dt$$

$$= \frac{1}{j\omega}(e^{j\omega a} - e^{-j\omega a}) = 2\frac{\sin\omega a}{\omega} = 2a\frac{\sin\omega a}{\omega a}$$

因此可得

$$p_a(t) \leftrightarrow 2\frac{\sin\omega a}{\omega} = 2a\frac{\sin\omega a}{\omega a} \tag{5.136}$$

$x(t)$的傅里叶变换 $X(\omega)$如图 5-16(b)所示。

5.20　求图 5-17(a)所示信号 $x(t) = \dfrac{\sin at}{\pi t}$的傅里叶变换。

解　由式(5.136)有

$$p_a(t) \leftrightarrow 2\frac{\sin\omega a}{\omega}$$

利用式(5.54)对偶特性可得

$$2\frac{\sin at}{t} \leftrightarrow 2\pi p_a(-\omega)$$

两边同时除以 2π 得

$$\frac{\sin at}{\pi t} \leftrightarrow p_a(-\omega) = p_a(\omega) \tag{5.137}$$

式中 $p_a(\omega)$定义为[见式(5.135)]

$$p_a(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < a \\ 0 & |\omega| > a \end{cases}$$

波形如图 5-17(b)所示。

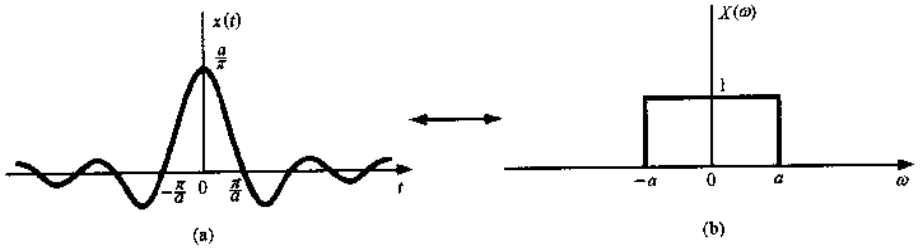


图 5-17　$\sin at/\pi t$ 及其傅里叶变换

5.21　求图 5-18(a)所示信号 $x(t)$的傅里叶变换

$$x(t) = e^{-a|t|} \qquad a > 0$$

解　将信号 $x(t)$改写为

$$x(t) = e^{-a|t|} = \begin{cases} e^{-at} & t > 0 \\ e^{at} & t < 0 \end{cases}$$

则

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt$$

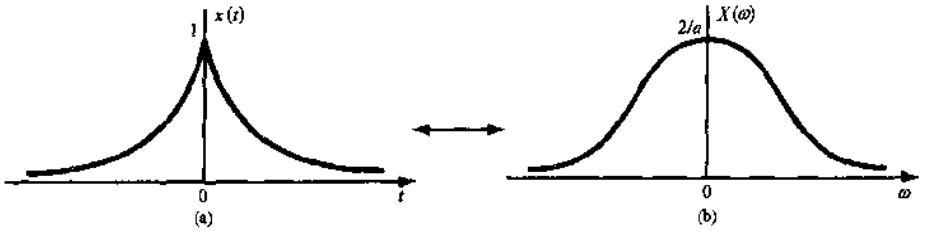


图 5-18　$e^{-a|t|}$及其傅里叶变换

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{(a-j\omega)t}dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-(a+j\omega)t}dt$$

$$= \frac{1}{a-j\omega} + \frac{1}{a+j\omega} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

因此可得

$$e^{-a|t|} \leftrightarrow \frac{2a}{a^2+\omega^2} \tag{5.138}$$

5.22　求图 5-19(a)所示信号 $x(t)$的傅里叶变换

$$x(t) = \frac{1}{a^2+t^2}$$

[redacted] 由式(5.138)有

$$e^{-a|t|} \leftrightarrow \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

利用式(5.54)对偶特性可得

$$\frac{2a}{a^2+t^2} \leftrightarrow 2\pi e^{-a|-\omega|} = 2\pi e^{-a|\omega|}$$

两边同时除以 $2a$ 得

$$\frac{1}{a^2+t^2} \leftrightarrow \frac{\pi}{a}e^{-a|\omega|} \tag{5.139}$$

$x(t)$的傅里叶变换 $X(\omega)$如图 5-19(b)所示。

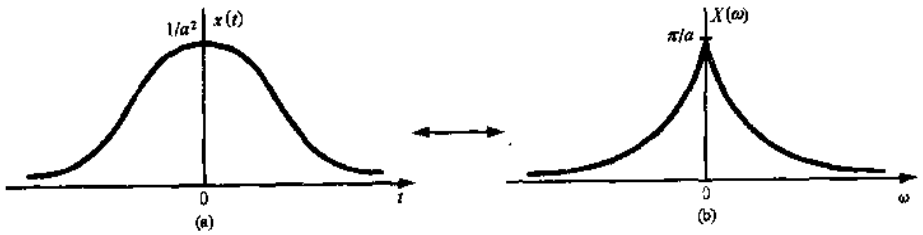


图 5-19　$1/(a^2+t^2)$及其傅里叶变换

5.23　求下列信号的傅里叶变换：

(a)$x(t)=1$　　(b)$x(t)=e^{j\omega_0 t}$

(c)$x(t)=e^{-j\omega_0 t}$　　(d)$x(t)=\cos\omega_0 t$

(e)$x(t)=\sin\omega_0 t$

[redacted] (a)由式(5.43)有

$$\delta(t) \leftrightarrow 1 \tag{5.140}$$

利用式(5.54)对偶特性可得

$$1 \leftrightarrow 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega) \tag{5.141}$$

图 5-20(a)和(b)分别示出了式(5.140)和(5.141)的关系曲线。

(b)对式(5.141)应用式(5.51)的频移特性，可得

$$e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0) \tag{5.142}$$

(c)由式(5.142)可得

$$e^{-j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega+\omega_0) \tag{5.143}$$

(d)由欧拉公式有

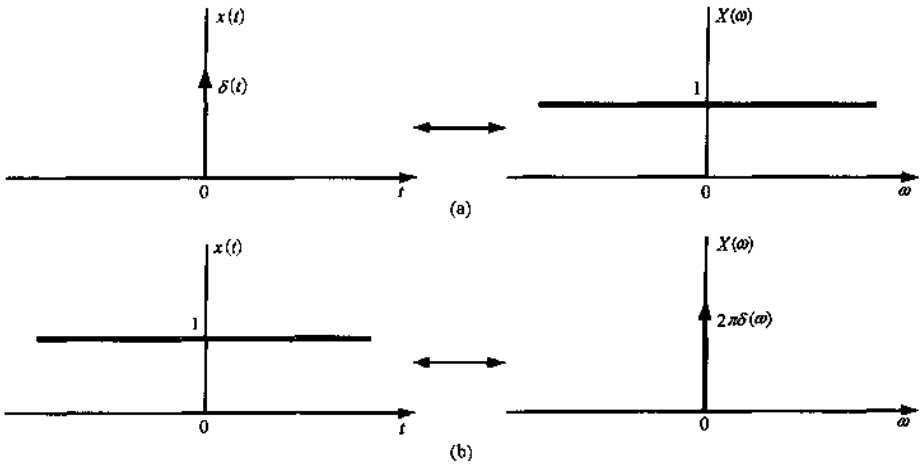


图 5-20　(a)单位冲激及其傅里叶变换;(b)直流信号及其傅里叶变换

$$\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

利用式(5.142)、(5.143)以及式(5.49)的线性特性,可得

$$\cos\omega_0 t \leftrightarrow \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)] \tag{5.144}$$

图 5-21 绘出了式(5.144)的关系曲线。

(e)类似地有

$$\sin\omega_0 t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})$$

利用式(5.142)和式(5.143)可得

$$\sin\omega_0 t \leftrightarrow -j\pi[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] \tag{5.145}$$

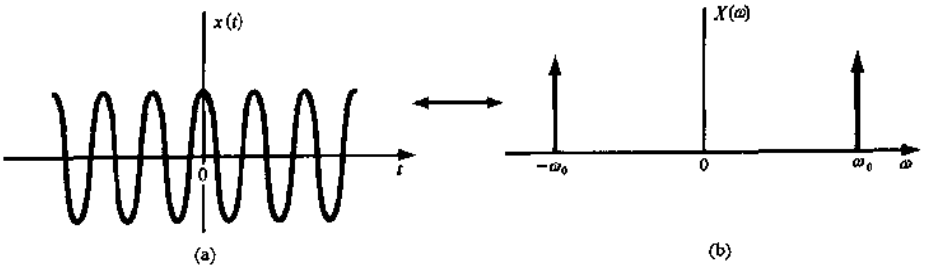


图 5-21　余弦信号及其傅里叶变换

5.24　求周期为 T_0 的周期信号 $x(t)$的傅里叶变换。

[redacted]　$x(t)$可以表示为

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

对上式两边做傅里叶变换,并利用式(5.142)和(5.49)的线性特性,可得

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(\omega - k\omega_0) \tag{5.146}$$

该式表明周期信号的傅里叶变换由位于谐波频率处的等间隔冲激序列组成。

5.25　求周期冲激序列的傅里叶变换

$$\delta_{T_0}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0)$$

[redacted]　由习题 5.8 中的式(5.115),$\delta_{T_0}(t)$的指数傅里叶级数为

$$\delta_{T_0}(t) = \frac{1}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t} \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

利用式(5.146)可得

$$\mathscr{F}[\delta_{T_0}(t)] = \frac{2\pi}{T_0}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - k\omega_0)$$

$$= \omega_0\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - k\omega_0) = \omega_0\delta_{\omega_0}(\omega)$$

或
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t - kT_0) \leftrightarrow \omega_0\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - k\omega_0) \tag{5.147}$$

可见,单位冲激序列的傅里叶变换也是一个冲激序列,如图 5-22(b)。

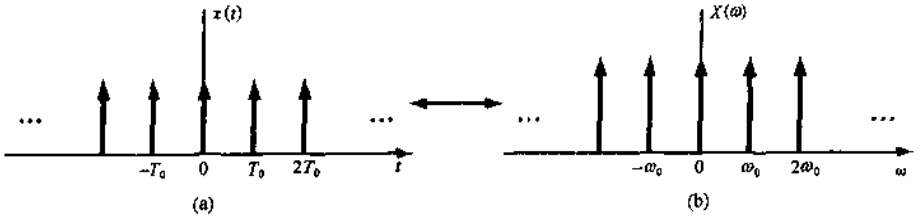


图 5-22 单位冲激序列及其傅里叶变换

5.26 证明

$$x(t)\cos\omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2}[X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)] \tag{5.148}$$

和
$$x(t)\sin\omega_0 t \leftrightarrow -\frac{1}{2}j[X(\omega - \omega_0) - X(\omega + \omega_0)] \tag{5.149}$$

式(5.148)称为调制定理。

[redacted] 由欧拉公式有

$$\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

利用式(5.51)的频移特性和式(5.49)的线性特性,可得

$$\mathscr{F}[x(t)\cos\omega_0 t] = \mathscr{F}\left[\frac{1}{2}x(t)e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}x(t)e^{-j\omega_0 t}\right]$$

$$= \frac{1}{2}[X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)]$$

因此

$$x(t)\cos\omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2}[X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)]$$

采用上述方法,有

$$\sin\omega_0 t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})$$

$$\mathscr{F}[x(t)\sin\omega_0 t] = \mathscr{F}\left[\frac{1}{2j}x(t)e^{j\omega_0 t} - \frac{1}{2j}x(t)e^{-j\omega_0 t}\right]$$

$$= \frac{1}{2j}[X(\omega - \omega_0) - X(\omega + \omega_0)]$$

因此

$$x(t)\sin\omega_0 t \leftrightarrow -\frac{1}{2}j[X(\omega - \omega_0) - X(\omega + \omega_0)]$$

5.27 已知 $x(t)$的傅里叶反变换为

$$X(\omega) = \frac{1}{2}[P_a(\omega - \omega_0) + P_a(\omega + \omega_0)]$$

如图 5-23(a)所示,求 $x(t)$并画图。

[redacted] 由式(5.137)和式(5.148)的调制定理可求出

$$x(t) = \frac{\sin at}{\pi t}\cos\omega_0 t$$

其波形如图 5-23(b)。

5.28 证明式(5.55)的微分特性,即

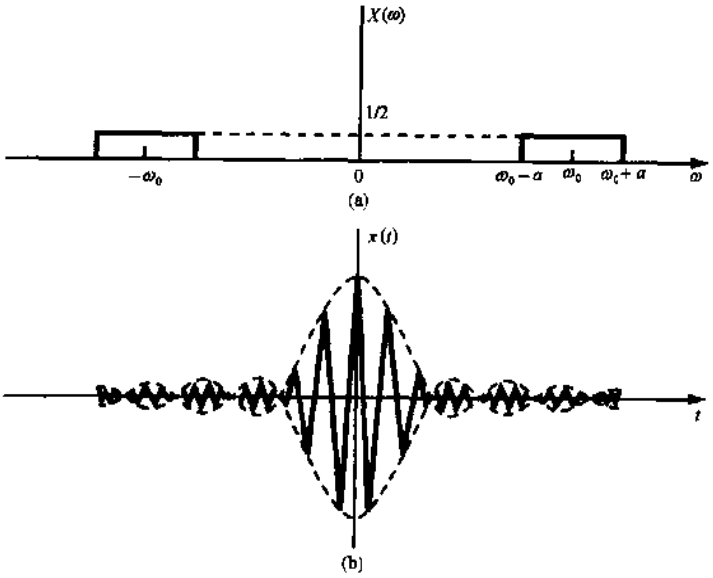


图 5-23

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega X(\omega)$$

[redacted] 由式(5.137)可知 $X(\omega)$的傅里叶反变换为

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega \tag{5.150}$$

则

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\frac{\partial}{\partial t}(e^{j\omega t})d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} j\omega X(\omega)e^{j\omega t}d\omega \end{aligned} \tag{5.151}$$

比较式(5.151)和式(5.150)，可见 $dx(t)/dt$ 的傅里叶变换为$j\omega X(\omega)$，所以

$$\frac{dx(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega X(\omega)$$

5.29 求符号函数的傅里叶变换，符号函数如图 5-24 所示，定义为

$$\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases} \tag{5.152}$$

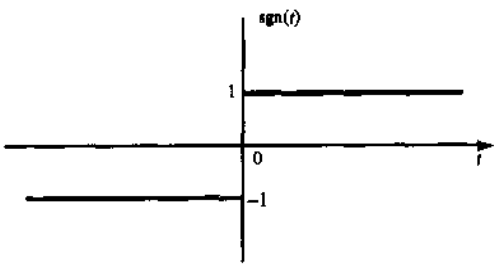


图 5-24　符号函数

[redacted] 符号函数 $\mathrm{sgn}(t)$可以表示为

$$\mathrm{sgn}(t) = 2u(t) - 1$$

利用式(1.130)，有

$$\frac{d}{dt}\mathrm{sgn}(t) = 2\delta(t)$$

设　　$\mathrm{sgn}(t) \leftrightarrow X(\omega)$

应用式(5.55)的微分特性，可得

$$j\omega X(\omega) = \mathcal{F}[2\delta(t)] = 2 \rightarrow X(\omega) = \frac{2}{j\omega}$$

因此

$$\mathrm{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega} \tag{5.153}$$

因为 $\mathrm{sgn}(t)$为奇函数，所以它的傅里叶变换为 ω 的纯虚函数(习题 5.41)。

5.30 证明式(5.48)，即

$$u(t)\leftrightarrow \pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega} \tag{5.154}$$

解　如图 5-25 所示，$u(t)$可以表示为

$$u(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)$$

式中$\frac{1}{2}$是 $u(t)$偶分量，$\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)$是 $u(t)$奇分量。利用式(5.141)和(5.153)以及式(5.49)的线性特性，可得

$$u(t)\leftrightarrow \pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$$

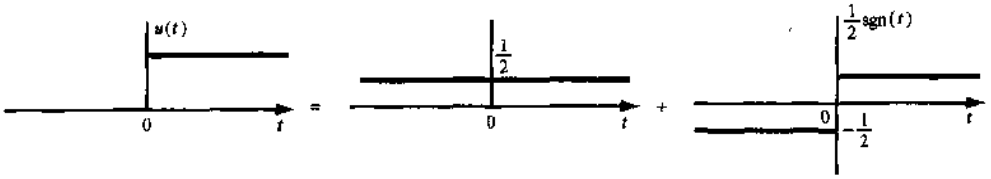


图 5-25　单位阶跃信号及其奇偶分量

5.31　证明式(5.58)的卷积定理，即

$$x_1(t)*x_2(t)\leftrightarrow X_1(\omega)X_2(\omega)$$

解　由定义式(2.6)和(5.31)，有

$$\mathscr{F}[x_1(t)*x_2(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau\right]e^{-j\omega t}dt$$

交换积分次序

$$\mathscr{F}[x_1(t)*x_2(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}x_1(\tau)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}x_2(t-\tau)e^{-j\omega t}dt\right]d\tau$$

由式(5.50)的时移特性

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x_2(t-\tau)e^{-j\omega t}dt=X_2(\omega)e^{-j\omega\tau}$$

由此可得

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[x_1(t)*x_2(t)]&=\int_{-\infty}^{+\infty}x_1(\tau)X_2(\omega)e^{-j\omega\tau}d\tau\\&=\left[\int_{-\infty}^{+\infty}x_1(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\right]X_2(\omega)=X_1(\omega)X_2(\omega)\end{aligned}$$

因此

$$x_1(t)*x_2(t)\leftrightarrow X_1(\omega)X_2(\omega)$$

5.32　利用式(5.58)的卷积定理，求 $X(\omega)=1/(a+j\omega)^2$ 的傅里叶反变换。

解　由式(5.45)有

$$e^{-at}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{a+j\omega} \tag{5.155}$$

又
$$X(\omega)=\frac{1}{(a+j\omega)^2}=\left(\frac{1}{a+j\omega}\right)\left(\frac{1}{a+j\omega}\right)$$

利用式(5.58)的时域卷积定理，可得

$$\begin{aligned}x(t)&=e^{-at}u(t)*e^{at}u(t)\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-a\tau}u(\tau)e^{-a(t-\tau)}u(t-\tau)d\tau\\&=e^{-at}\int_0^t d\tau=te^{-at}u(t)\end{aligned}$$

因此

$$te^{-at}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{(a+j\omega)^2} \tag{5.156}$$

5.33　证明式(5.57)的积分特性，即

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \leftrightarrow \pi X(0)\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}X(\omega)$$

证明 由式(2.60)有

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau = x(t) * u(t)$$

利用式(5.58)的时域卷积定理和式(5.154),可得

$$\mathcal{F}[x(t) * u(t)] = X(\omega)\left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}\right] = \pi X(\omega)\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}X(\omega)$$

因为由式(1.25)有 $X(\omega)\delta(\omega) = X(0)\delta(\omega)$,所以

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \leftrightarrow \pi X(0)\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}X(\omega)$$

5.34 利用式(5.57)的积分特性和式(1.31),求 $u(t)$的傅里叶变换。

解 由式(1.31)有

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau$$

又由式(5.140)有

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$

令式(5.57)中 $x(\tau) = \delta(\tau)$,可得

$$x(t) = \delta(t) \leftrightarrow X(\omega) = 1 \quad \text{且 } X(0) = 1$$

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

5.35 证明式(5.59)的频域卷积定理,即

$$x_1(t)x_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}X_1(\omega) * X_2(\omega)$$

证明 由式(5.31)和式(5.32)的定义,有

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[x_1(t)x_2(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)x_2(t)e^{-j\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X_1(\lambda)e^{j\lambda t}d\lambda\right]x_2(t)e^{-j\omega t}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X_1(\lambda)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x_2(t)e^{-j(\omega-\lambda)t}dt\right]d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X_1(\lambda)X_2(\omega-\lambda)d\lambda = \frac{1}{2\pi}X_1(\omega) * X_2(\omega)
\end{aligned}$$

因此

$$x_1(t)x_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}X_1(\omega) * X_2(\omega)$$

5.36 利用式(5.59)的频域卷积定理推导式(5.148)的调制定理。

证明 根据式(5.144),有

$$\cos\omega_0 t \leftrightarrow \pi\delta(\omega-\omega_0) + \pi\delta(\omega+\omega_0)$$

由式(5.59)的频域卷积定理,得

$$x(t)\cos\omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}X(\omega) * [\pi\delta(\omega-\omega_0) + \pi\delta(\omega+\omega_0)]$$

再由式(2.59),即得

$$x(t)\cos\omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2}X(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}X(\omega+\omega_0)$$

5.37 证明式(5.63)的帕斯瓦尔定律,即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)x_2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X_1(\omega)X_2(-\omega)d\omega$$

证明 由式(5.59)的频域卷积定理,可得

$$\mathcal{F}[x_1(t)x_2(t)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X_1(\lambda)X(\omega-\lambda)d\lambda$$

即 $$\int_{-\infty}^{+\infty}[x_1(t)x_2(t)]e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X_1(\lambda)X_2(\omega-\lambda)d\lambda$$

令 $\omega=0$,可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x_1(t)x_2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X_1(\lambda)X_2(-\lambda)d\lambda$$

改变上式右边的积分变量,即得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x_1(t)x_2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X_1(\omega)X_2(-\omega)d\omega$$

5.38 证明式(5.64)的帕斯瓦尔恒等式或帕斯瓦尔定理。即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|X(\omega)|^2d\omega$$

[redacted] 由式(5.31)的定义,有

$$\mathscr{F}[x^*(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}x^*(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$=\left[\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{j\omega t}dt\right]^*=X^*(-\omega)$$

式中 * 号表示复数共轭,因此有

$$x^*(t)\leftrightarrow X^*(-\omega) \tag{5.157}$$

设式(5.63)帕斯瓦尔定律中 $x_1(t)=x(t)$, $x_2(t)=x^*(t)$,可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)x^*(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)X^*(\omega)d\omega$$

或 $$\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|X(\omega)|^2d\omega$$

5.39 证明式(5.61a),即

$$X^*(\omega)=X(-\omega)$$

是 $x(t)$为实信号的充要条件。

[redacted] 由式(5.31)的定义,有

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

若 $x(t)$为实信号,则 $x(t)=x^*(t)$。对上式两边取共轭有

$$X^*(\omega)=\left|\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt\right|^*=\int_{-\infty}^{+\infty}x^*(t)e^{j\omega t}dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{j\omega t}dt=X(-\omega)$$

由此即证 $X^*(\omega)=X(-\omega)$是 $x(t)$为实信号的必要条件。下面假设 $X^*(\omega)=X(-\omega)$,由式(5.32)的傅里叶反变换定义

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

两边取共轭有

$$[x(t)]^*=\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega\right]^*=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X^*(\omega)e^{-j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(-\omega)e^{-j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(\lambda)e^{j\lambda t}d\lambda=x(t)$$

该式表明 $x(t)$为实信号。由此可得出结论:$X^*(\omega)=X(-\omega)$是 $x(t)$为实信号的充要条件。

5.40 求下列信号的傅里叶变换。

(a)$x(t)=u(-t)$

(b)$x(t)=e^{at}u(-t)$, $a>0$

[redacted] 由式(5.53)有

$$x(-t)\leftrightarrow X(-\omega)$$

若 $x(t)$为实信号,由式(5.61a)可得

$$x(-t)\leftrightarrow X(-\omega)=X^*(\omega) \tag{5.158}$$

(a)由式(5.154)

$$u(t)\leftrightarrow\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$$

再由式(5.158),即得

$$u(-t)\leftrightarrow\pi\delta(\omega)-\frac{1}{j\omega} \tag{5.159}$$

(b)由式(5.155)

$$e^{-at}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{a+j\omega}$$

再由式(5.158),即得

$$e^{at}u(-t)\leftrightarrow\frac{1}{a-j\omega} \tag{5.160}$$

5.41 已知实信号 $x(t)$,设

$$X(\omega)=\mathscr{F}[x(t)]=A(\omega)+jB(\omega)$$

且

$$x(t)=x_e(t)+x_o(t)$$

式中 $x_e(t)$和 $x_o(t)$分别为 $x(t)$的偶分量和奇分量。证明

$$x_e(t)\leftrightarrow A(\omega) \tag{5.161a}$$

$$x_o(t)\leftrightarrow jB(\omega) \tag{5.161b}$$

[redacted] 由式(1.5)和(1.6)有

$$x_e(t)=\frac{1}{2}[x(t)+x(-t)]$$

$$x_o(t)=\frac{1}{2}[x(t)-x(-t)]$$

若 $x(t)$为实信号,由式(5.158)有

$$x(t)\leftrightarrow X(\omega)=A(\omega)+jB(\omega)$$

$$x(-t)\leftrightarrow X(-\omega)=X^*(\omega)=A(\omega)-jB(\omega)$$

由此可得出

$$x_e(t)\leftrightarrow\frac{1}{2}X(\omega)+\frac{1}{2}X^*(\omega)=A(\omega)$$

$$x_o(t)\leftrightarrow\frac{1}{2}X(\omega)-\frac{1}{2}X^*(\omega)=jB(\omega)$$

5.42 利用式(5.161a)和(5.155),求 $e^{-a|t|}(a>0)$的傅里叶变换。

[redacted] 由式(5.155)有

$$e^{-at}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{a+j\omega}=\frac{a}{a^2+\omega^2}-j\frac{\omega}{a^2+\omega^2}$$

再由式(1.5)可知 $e^{-at}u(t)$的偶分量为

$$\frac{1}{2}e^{-at}u(t)+\frac{1}{2}e^{at}u(-t)-\frac{1}{2}e^{-a|t|}$$

利用式(5.61a),可得

$$\frac{1}{2}e^{-a|t|}\leftrightarrow\mathrm{Re}\left(\frac{1}{a+j\omega}\right)=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

即

$$e^{-a|t|}\leftrightarrow\frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

5.43 求高斯脉冲信号的傅里叶变换:

$$x(t)=e^{-at^2}\qquad a>0$$

[redacted] 由式(5.31)定义有

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-at^2}e^{-j\omega t}dt \tag{5.162}$$

式(5.162)两边对 ω 求导,可得

$$\frac{dX(\omega)}{d\omega}=-j\int_{-\infty}^{\infty}te^{-at^2}e^{-j\omega t}dt$$

利用分部积分公式

$$\int_\alpha^\beta u\,dv = uv\Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta v\,du$$

令 $$u = e^{-j\omega t},\quad dv = te^{-at^2}dt$$

则有 $$du = -j\omega e^{-j\omega t}dt,\quad v = -\frac{1}{2a}e^{-at^2}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-at^2}e^{-j\omega t}dt = -\frac{1}{2a}e^{-at^2}e^{-j\omega t}\Big|_{-\infty}^{\infty} - j\frac{\omega}{2a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2}e^{-j\omega t}dt$$

$$= -j\frac{\omega}{2a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2}e^{-j\omega t}dt$$

因为 $a>0$,所以

$$\frac{dX(\omega)}{d\omega} = -\frac{\omega}{2a}X(\omega)$$

解此微分方程,可得

$$X(\omega) = Ae^{-\omega^2/4a} \tag{5.163}$$

下面计算 A 值。设式(5.162)中 $\omega=0$,再通过改变积分变量,可得

$$X(0) = A = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at^2}dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-at^2}dt = \frac{2}{a}\int_0^{\infty} e^{-\lambda^2}d\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

将 A 值代入式(5.163),可得

$$X(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\omega^2/4a} \tag{5.164}$$

所以

$$e^{-at^2},\ a>0 \leftrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\omega^2/4a} \tag{5.165}$$

可见高斯脉冲信号的傅里叶变换也是一个高斯脉冲,如图 5-26 所示。

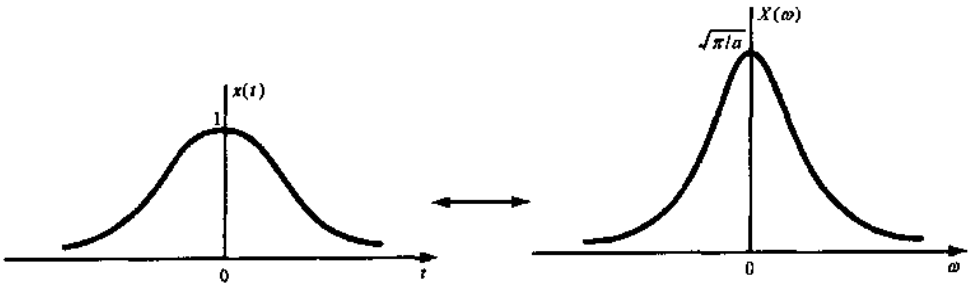


图 5-26 高斯脉冲信号及其傅里叶变换

频响特性

5.44 利用傅里叶变换重做习题 2.25。

[redacted] 系统描述为

$$y'(t) + 2y(t) = x(t) + x'(t)$$

对上式做傅里叶变换,可得

$$j\omega Y(\omega) + 2Y(\omega) = X(\omega) + j\omega X(\omega)$$

或 $$(j\omega + 2)Y(\omega) = (1 + j\omega)X(\omega)$$

由式(5.57)可得频响特性 $H(\omega)$为

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1+j\omega}{2+j\omega} = \frac{2+j\omega-1}{2+j\omega} = 1 - \frac{1}{2+j\omega}$$

对 $H(\omega)$做傅里叶反变换,求出单位冲激响应 $h(t)$为

$$h(t) = \delta(t) - e^{-2t}u(t)$$

这一解题过程与用拉普拉斯变换法求解完全相同(习题 3.29)。

5.45 已知一连续 LTI 系统可用下式描述

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t) \tag{5.166}$$

利用傅里叶变换求下列输入信号作用下的输出 $y(t)$:

(a)$x(t)=e^{-t}u(t)$

(b)$x(t)=u(t)$

[redacted] (a)对式(5.166)做傅里叶变换,可得

$$j\omega Y(\omega)+2Y(\omega)=X(\omega)$$

$$H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}=\frac{1}{2+j\omega}$$

由式(5.155)有

$$X(\omega)=\frac{1}{1+j\omega}$$

则
$$Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)=\frac{1}{(1+j\omega)(2+j\omega)}=\frac{1}{1+j\omega}-\frac{1}{2+j\omega}$$

故
$$y(t)=(e^{-t}-e^{-2t})u(t)$$

(b)由式(5.154)有

$$X(\omega)=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$$

再由式(5.66),并应用部分分式展开,可得

$$Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)=\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right]\frac{1}{2+j\omega}$$

$$=\pi\delta(\omega)\frac{1}{2+j\omega}+\frac{1}{j\omega(2+j\omega)}$$

$$=\frac{\pi}{2}\delta(\omega)+\frac{1}{2}\frac{1}{j\omega}-\frac{1}{2}\frac{1}{2+j\omega}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}\right]-\frac{1}{2}\frac{1}{2+j\omega}$$

在上面计算中用到了式(1.25)$f(\omega)\delta(\omega)=f(0)\delta(\omega)$关系。因此

$$y(t)=\frac{1}{2}u(t)-\frac{1}{2}e^{-2t}u(t)=\frac{1}{2}(1-e^{-2t})u(t)$$

可见,由于 $u(t)$的傅里叶变换较复杂,应用拉普拉斯变换求解更简便。

5.46 对习题 5.45 所述的 LTI 系统,如果输入信号 $x(t)$是图 5-27 所示的周期方波,求输出 $y(t)$的一次和三次谐波幅度。

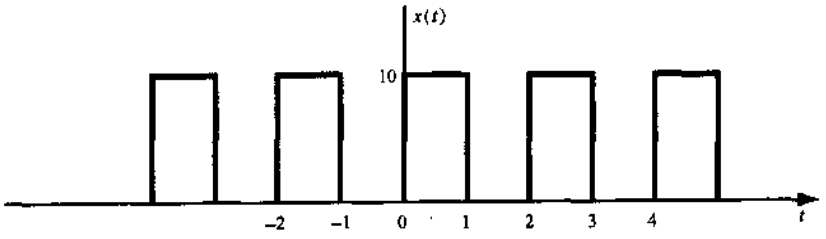


图 5-27

[redacted] 输入信号 $x(t)$与图 5-8 中的 $x(t)$相同[见习题 5.5]。设式(5.106)中 $A=10$, $T_0=2$, $\omega_0=2\pi/T_0=\pi$,可得

$$x(t)=5+\frac{10}{j\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2m+1}e^{j(2m+1)\pi t}$$

再由习题 5.45

$$H(\omega)=\frac{1}{2+j\omega}\rightarrow H(k\omega_0)=H(k\pi)=\frac{1}{2+jk\pi}$$

根据式(5.74),可得

$$y(t)=5H(0)+\frac{10}{j\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2m+1}H[(2m+1)\pi]e^{j(2m+1)\pi t}$$

$$=\frac{5}{2}+\frac{10}{j\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)[2+j(2m+1)\pi]}e^{j(2m+1)\pi t} \qquad (5.167)$$

令 $$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{jk\omega_0 t}$$

$y(t)$谐波形式可由式(5.15)给出,为

$$y(t) = D_0 + \sum_{k=1}^{\infty} D_k \cos(k\omega_0 t - \varphi_k)$$

式中 D_k 为$y(t)$ k 次谐波的幅度。由式(5.11)和式(5.16),D_k 和 d_k 的关系为

$$D_k = 2 \mid d_k \mid \tag{5.168}$$

因此,由式(5.167)可求出一次谐波幅度($m=0$)为

$$D_1 = 2 \mid d_1 \mid = 2\left|\frac{10}{j\pi(2+j\pi)}\right| = 1.71$$

三次谐波幅度为($m=1$ 时)

$$D_3 = 2 \mid d_3 \mid = 2\left|\frac{10}{j\pi(3)(2+j3\pi)}\right| = 0.22$$

5.47 波特图是频响特性 $H(\omega)$图形表示中应用最广的一种表示方法。波特图是将 $20\log_{10}|H(\omega)|$和 $\theta_H(\omega)$相对于对数尺度频率 ω 所做出的频响特性曲线。$20\log_{10}|H(\omega)|$的单位为分贝(dB),用符号$|H(\omega)|_{dB}$表示。画出下列频响特性的波特图。

(a)$H(\omega)=1+\dfrac{j\omega}{10}$

(b)$H(\omega)=\dfrac{1}{1+j\omega/100}$

(c)$H(\omega)=\dfrac{10^4(1+j\omega)}{(10+j\omega)(100+j\omega)}$

[redacted] (a)$|H(\omega)|_{dB}=20\log_{10}|H(\omega)|=20\log_{10}\left|1+j\dfrac{\omega}{10}\right|$

若 $\omega \ll 10$,当 $\omega \to 0$ 时

$$|H(\omega)|_{dB} = 20\log_{10}\left|1+j\frac{\omega}{10}\right| \to 20\log_{10}1 = 0$$

若 $\omega \gg 10$,当 $\omega \to \infty$ 时

$$|H(\omega)|_{dB} = 20\log_{10}\left|1+j\frac{\omega}{10}\right| \to 20\log_{10}\left(\frac{\omega}{10}\right)$$

在对数尺度频率上,$20\log_{10}(\omega/10)$是一条斜率为 20dB/十倍频的直线。这条直线在 $\omega=10$ 时与0dB轴相交,如图 5-28(a)所示,ω 在这一点的频率称为拐点频率。在拐点频率 $\omega=10$ 处

$$|H(10)|_{dB} = 20\log_{10}|1+j1| = 20\log_{10}\sqrt{2} = 3\text{dB}$$

$|H(\omega)|_{dB}$的曲线如图 5-28(a)所示。

$$\theta_H(\omega) = \arctan\frac{\omega}{10}$$

当 $\omega \to 0$ 时

$$\theta_H(\omega) = \arctan\frac{\omega}{10} \to 0$$

当 $\omega \to \infty$ 时

$$\theta_H(\omega) = \arctan\frac{\omega}{10} \to \frac{\pi}{2}$$

在 $\omega=10$ 点,$\theta_H(10)=\arctan 1=\pi/4(\text{rad})$,$\theta_H(\omega)$的曲线如图 5-28(b)所示。图中虚线为波特图表示的近似直线。

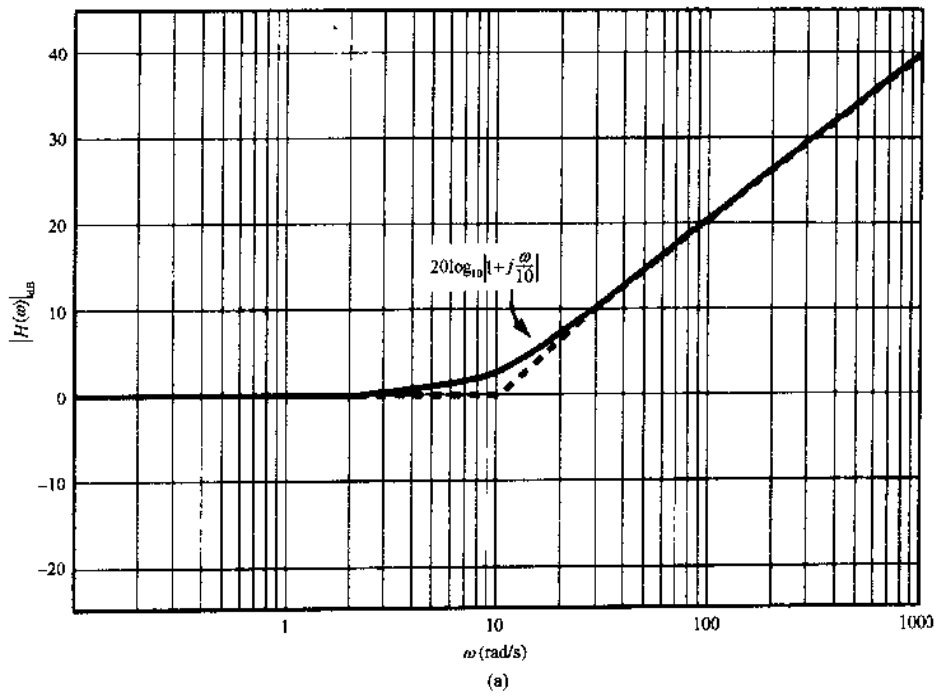
(b) $$|H(\omega)|_{dB} = 20\log_{10}\left|\frac{1}{1+j\omega/100}\right| = -20\log_{10}\left|1+j\frac{\omega}{100}\right| \to -20\log_{10}1 = 0$$

若 $\omega \ll 100$,当 $\omega \to 0$ 时

$$|H(\omega)|_{dB} = -20\log_{10}\left|1+j\frac{\omega}{100}\right| \to -20\log_{10}1 = 0$$

若 $\omega \gg 100$,当 $\omega \to \infty$ 时

$$|H(\omega)|_{dB} = -20\log_{10}\left|1+j\frac{\omega}{100}\right| \to -20\log_{10}\left(\frac{\omega}{100}\right)$$



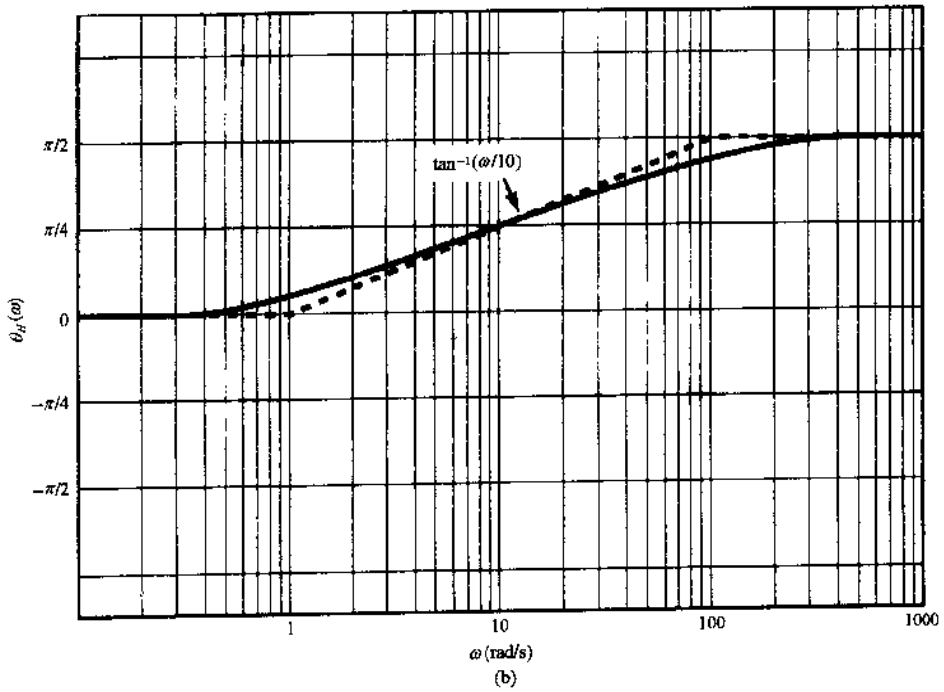


图 5-28　波特图

在对数尺度频率上，$20\log_{10}(\omega/100)$是一条斜率为 −20dB/十倍频的直线。这条直线在拐点频率 $\omega=100$ 处与 0dB 轴相交，如图 5-29(a)所示。在拐点频率 $\omega=100$ 处

$$|H(100)|_{dB}=-20\log_{10}\sqrt{2}\approx-3\text{dB}$$

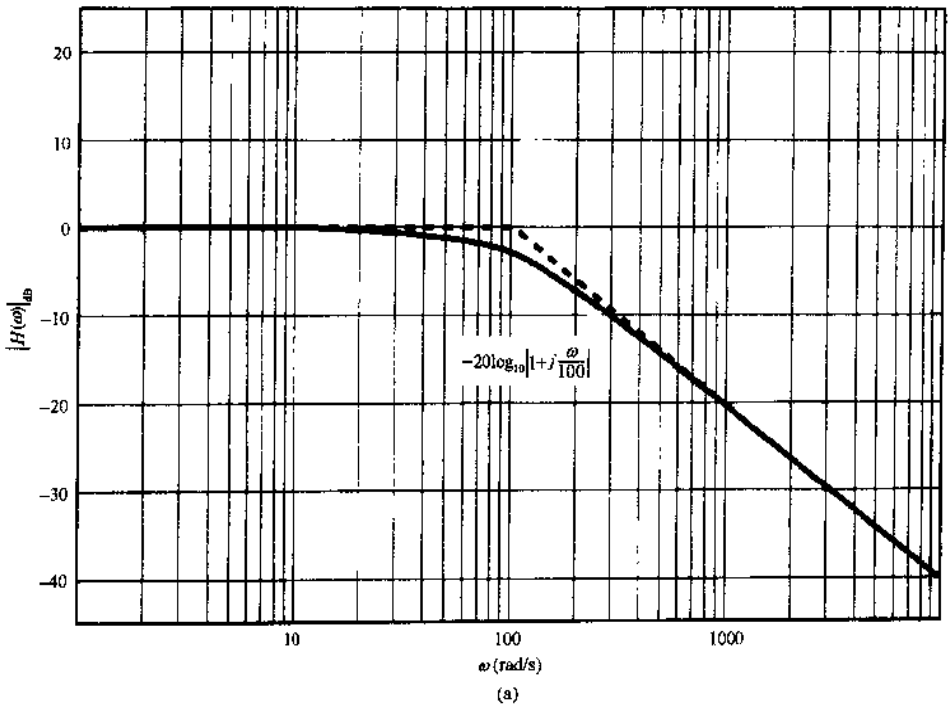
$|H(\omega)|_{dB}$的曲线如图 5-29(a)所示。

$$\theta_H(\omega)=-\arctan\frac{\omega}{100}$$

当 $\omega\to0$ 时　　$\theta_H(\omega)=-\arctan\frac{\omega}{100}\to0$

当 $\omega\to\infty$ 时　　$\theta_H(\omega)=-\arctan\frac{\omega}{100}\to\frac{\pi}{2}$

在 $\omega=100$ 点，$\theta_H(100)=-\arctan1=-\pi/4(\text{rad})$，$\theta_H(\omega)$的曲线如图 5-29(b)所示。



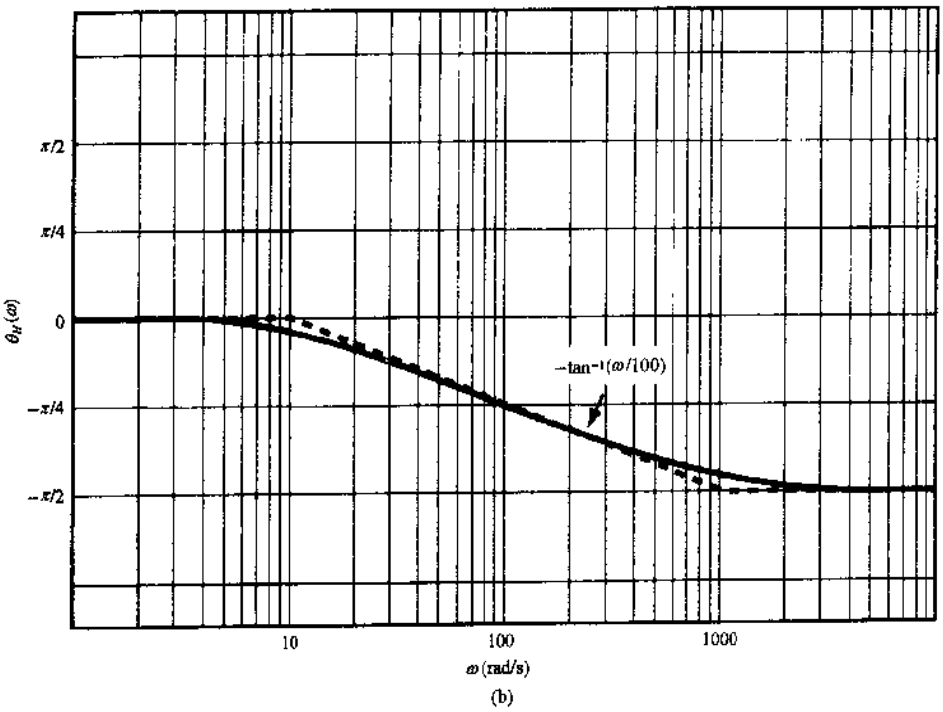


图 5-29　波特图

(c)首先将 $H(\omega)$写成标准形式

$$H(\omega)=\frac{10(1+j\omega)}{(1+j\omega/10)(1+j\omega/100)}$$

则

$$|H(\omega)|_{dB}=20\log_{10}10+20\log_{10}|1+j\omega|-20\log_{10}\left|1+j\frac{\omega}{10}\right|-20\log_{10}\left|1+j\frac{\omega}{100}\right|$$

$|H(\omega)|_{dB}$有三个拐点频率，$\omega=1$，$\omega=10$ 和 $\omega=100$。在拐点频率 $\omega=1$ 处，

$$H(1)|_{dB}=20+20\log_{10}\sqrt{2}-20\log_{10}\sqrt{1.01}-20\log_{10}\sqrt{10001}\approx 23\text{dB}$$

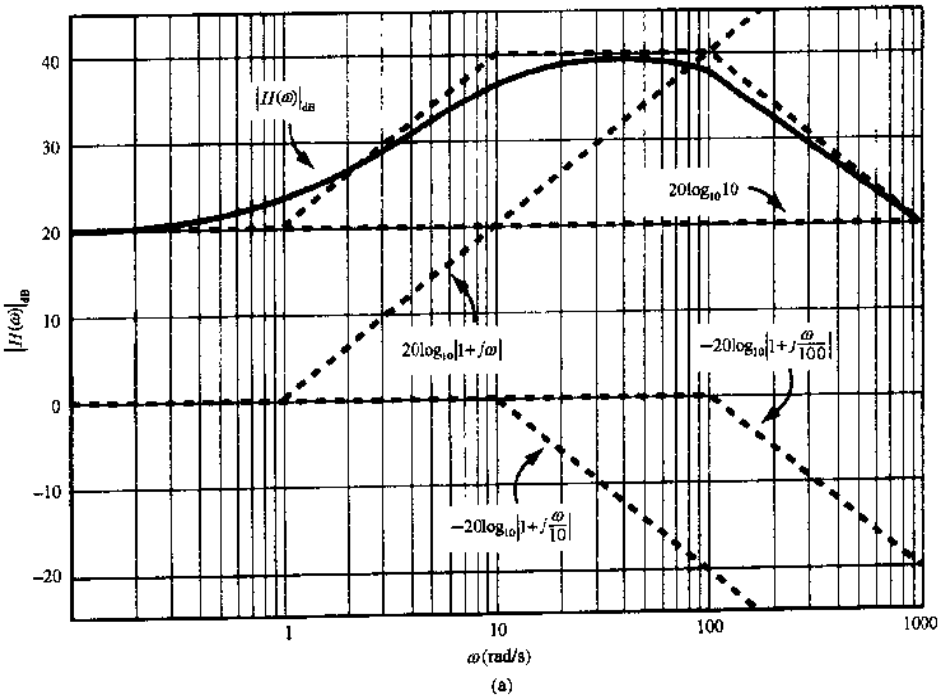
在拐点频率 $\omega=10$ 处，

$$H(10)|_{dB}=20+20\log_{10}\sqrt{101}-20\log_{10}\sqrt{2}-20\log_{10}\sqrt{1.01}\approx 37\text{dB}$$

在拐点频率 $\omega=100$ 处，

$$H(100)\,|_{dB}=20+20\log_{10}\sqrt{10001}-20\log_{10}\sqrt{101}-20\log_{10}\sqrt{2}\approx 37\text{dB}$$

$|H(\omega)|_{dB}$的曲线如图 5-30(a)所示。



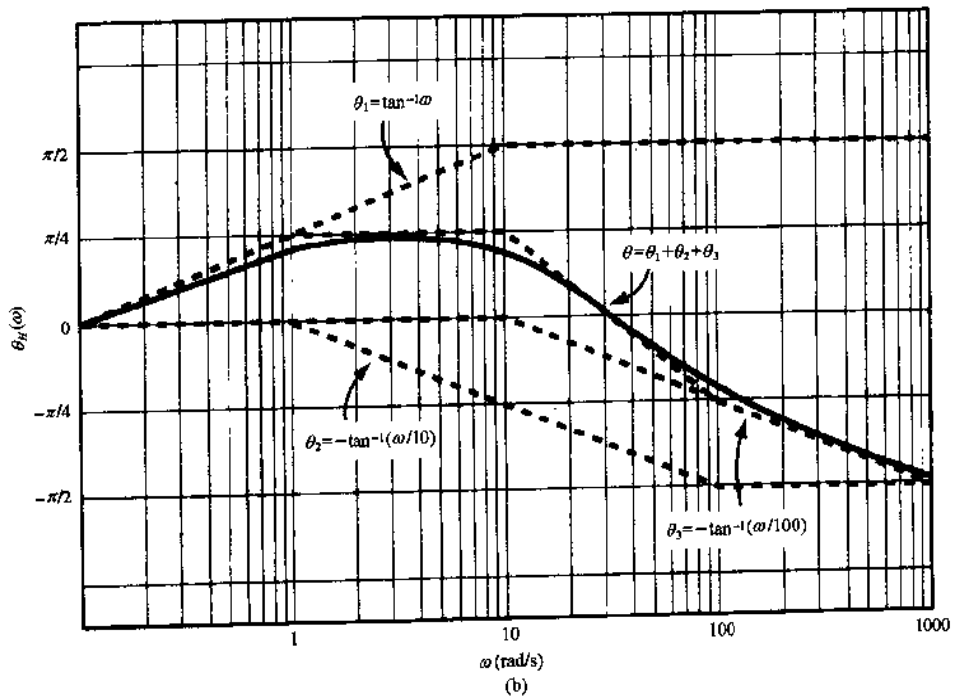


图 5-30　波特图

$$\theta_H(\omega)=\arctan(\omega)-\arctan\left(\frac{\omega}{10}\right)-\arctan\left(\frac{\omega}{100}\right)$$

当 $\omega\to 0$ 时

$$\theta_H(\omega)=\to 0-0-0=0$$

当 $\omega\to\infty$ 时

$$\theta_H(\omega)=\to\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}$$

且有

$$\theta_H(1) = \arctan(1) - \arctan(0.1) - \arctan(0.01) = 0.676\text{rad}$$
$$\theta_H(10) = \arctan(10) - \arctan(1) - \arctan(0.1) = 0.586\text{rad}$$
$$\theta_H(100) = \arctan(100) - \arctan(10) - \arctan(1) = -0.676\text{rad}$$

$\theta_H(\omega)$的曲线如图5-30(b)所示。

5.48 如图5-31所示,理想$-\pi/2$rad相移器的频响特性定义为

$$H(\omega) = \begin{cases} e^{-j(\pi/2)} & \omega > 0 \\ e^{j(\pi/2)} & \omega < 0 \end{cases} \tag{5.169}$$

(a)求该相移器的冲激响应$h(t)$。

(b)对于任意输入$x(t)$,求该相移器的输出$y(t)$。

(c)当$x(t)=\cos\omega_0 t$时,求该相移器的输出$y(t)$。

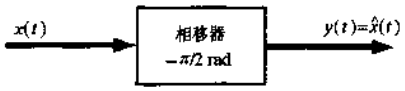


图5-31 $-\pi/2$rad相移器

[redacted] (a)因为$e^{-j\pi/2}=-j$, $e^{j\pi/2}=j$, $H(\omega)$可改写为

$$H(\omega) = -j\text{sgn}(\omega) \tag{5.170}$$

式中

$$\text{sgn}(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega > 0 \\ -1 & \omega < 0 \end{cases} \tag{5.171}$$

由式(5.153)有

$$\text{sgn}(\omega) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$

根据式(5.54)的对偶特性及sgn(ω)奇对称性,可得

$$\frac{2}{jt} \leftrightarrow 2\pi\,\text{sgn}(-\omega) = -2\pi\,\text{sgn}(\omega)$$

或

$$\frac{1}{\pi t} \leftrightarrow -j\text{sgn}(\omega) \tag{5.172}$$

由此可得冲激响应$h(t)$为

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}[H(\omega)] = \mathcal{F}^{-1}[-j\text{sgn}(\omega)] = \frac{1}{\pi t} \tag{5.173}$$

(b)根据式(2.26),可得

$$y(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau}d\tau \tag{5.174}$$

由式(5.174)定义的信号$y(t)$称为$x(t)$的希尔伯特变换,通常用符号$\hat{x}(t)$表示。

(c)由式(5.144),得

$$\cos\omega_0 t \leftrightarrow \pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$$

则

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = \pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)][-j\text{sgn}(\omega)]$$
$$= -\pi\,\text{sgn}(\omega_0)\delta(\omega-\omega_0) - j\pi\,\text{sgn}(-\omega_0)\delta(\omega+\omega_0)$$

因为sgn(ω_0)=1, sgn($-\omega_0$)=-1,所以

$$Y(\omega) = -j\pi\delta(\omega-\omega_0) + j\pi\delta(\omega+\omega_0)$$

故由式(5.145),可得

$$y(t) = \sin\omega_0 t$$

注意:$\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\omega_0 t$。

5.49 已知一连续因果LTI系统的频响特性为

$$H(\omega) = A(\omega) + jB(\omega)$$

证明该系统的冲激响应$h(t)$可分别由$A(\omega)$或$B(\omega)$求出。

[redacted] 因为系统是因果的，根据定义

$$h(t) = 0 \quad t < 0$$

因此

$$h(-t) = 0 \quad t > 0$$

设

$$h(t) = h_e(t) + h_o(t)$$

式中 $h_e(t)$和 $h_o(t)$分别为 $h(t)$的偶分量和奇分量。由式(1.5)和(1.6)，可写出

$$h(t) = 2h_e(t) = 2h_o(t) \tag{5.175}$$

由式(5.61b)和(5.61c)有

$$h_e(t) \leftrightarrow A(\omega) \qquad h_o(t) \leftrightarrow jB(\omega)$$

因此，由式(5.175)可得

$$h(t) = 2h_e(t) = 2\mathscr{F}^{-1}[A(\omega)] \qquad t > 0 \tag{5.176a}$$

$$h(t) = 2h_o(t) = 2\mathscr{F}^{-1}[jB(\omega)] \qquad t > 0 \tag{5.176b}$$

式(5.176a)和(5.176b)表明系统的冲激响应 $h(t)$可分别由 $A(\omega)$或 $B(\omega)$求出。

5.50 已知一连续因果 LTI 系统的频响特性为

$$H(\omega) = A(\omega) + jB(\omega)$$

证明：如果系统的冲激响应 $h(t)$在原点无冲激，那么 $A(\omega)$和 $B(\omega)$满足下面方程：

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B(\lambda)}{\omega - \lambda} d\lambda \tag{5.177a}$$

$$B(\omega) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(\lambda)}{\omega - \lambda} d\lambda \tag{5.177b}$$

[redacted] 设

$$h(t) = h_e(t) + h_o(t)$$

因为系统是因果的，即 $t<0$ 时 $h(t)=0$，所以有

$$h_e(t) = -h_o(t) \qquad t < 0$$

此外，由式(5.175)可得

$$h_e(t) = h_e(t) \qquad t > 0$$

因此，利用式(5.152)可写出

$$h_e(t) = h_o(t)\mathrm{sgn}(t) \tag{5.178a}$$

$$h_o(t) = h_e(t)\mathrm{sgn}(t) \tag{5.178b}$$

再由式(5.61b)、(5.61c)和(5.153)可得

$$h_e(t) \leftrightarrow A(\omega) \qquad h_o(t) \leftrightarrow jB(\omega) \qquad \mathrm{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$

根据式(5.59)的频域卷积定理，可得到

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} jB(\omega) * \frac{2}{j\omega} = \frac{1}{\pi} B(\omega) * \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B(\lambda)}{\omega - \lambda} d\lambda$$

和

$$jB(\omega) = \frac{1}{2\pi} A(\omega) * \frac{2}{j\omega} = -j\frac{1}{\pi} A(\omega) * \frac{1}{\omega}$$

或

$$B(\omega) = -\frac{1}{\pi} A(\omega) * \frac{1}{\omega} = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(\lambda)}{\omega - \lambda} d\lambda$$

可见 $A(\omega)$是 $B(\omega)$的希尔伯特变换，$B(\omega)$是 $A(\omega)$希尔伯特变换的负值。

5.51 已知因果 LTI 系统频响特性 $H(\omega)$的实部为 $\pi\delta(\omega)$，求系统的频响特性 $H(\omega)$和冲激响应 $h(t)$。

[redacted] 设

$$H(\omega) = A(\omega) + jB(\omega)$$

已知 $A(\omega) = \pi\delta(\omega)$，利用式(5.177b)，可得

$$B(\omega) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi\delta(\lambda)}{\omega - \lambda} d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\lambda) \frac{1}{\omega - \lambda} d\lambda = -\frac{1}{\omega}$$

所以

$$H(\omega) = \pi\delta(\omega) - j\frac{1}{\omega} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

根据式(5.154)，得

$$h(t) = u(t)$$

滤波

5.52　已知理想低通滤波器的频率特性

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

输入信号为 $x(t) = \dfrac{\sin at}{\pi t}$。

(a)求 $a < \omega_c$ 时，滤波器的输出 $y(t)$。

(b)求 $a > \omega_c$ 时，滤波器的输出 $y(t)$。

(c)哪种情况下输出有失真？

(a)由式(5.137)(习题 5.20)，有

$$x(t) = \frac{\sin at}{\pi t} \leftrightarrow X(\omega) = P_a(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < a \\ 0 & |\omega| > a \end{cases}$$

当 $a < \omega_c$ 时，有

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = X(\omega)$$

因此

$$y(t) = x(t) = \frac{\sin at}{\pi t}$$

(b)当 $a > \omega_c$ 时，有

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = H(\omega)$$

因此

$$y(t) = h(t) = \frac{\sin \omega_c t}{\pi t}$$

(c)在(a)中，$\omega_c > a$，$y(t) = x(t)$，信号通过滤波器没有产生任何失真。在(b)中，$\omega_c < a$，$y(t) = h(t)$，信号通过滤波器产生了失真。

5.53　已知理想低通滤波器的频率特性

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < 4\pi \\ 0 & |\omega| > 4\pi \end{cases}$$

滤波器的输入为图 5-27 所示的周期方波，求输出 $y(t)$。

令式(5.107)中(习题 5.5)$A = 10$，$T_0 = 2$，$\omega_0 = 2\pi/T_0 = \pi$，可得

$$x(t) = 5 + \frac{20}{\pi}\left(\sin \pi t + \frac{1}{3}\sin 3\pi t + \frac{1}{5}\sin 5\pi t + \cdots\right)$$

因为滤波器的截频为 4π rad，所以 $x(t)$中角频率小于 4π rad 的各次谐波分量都能通过，而 $x(t)$中角频率大于 4π rad 的各次谐波分量则不能通过。因此

$$y(t) = 5 + \frac{20}{\pi}\sin \pi t + \frac{20}{3\pi}\sin \pi t$$

5.54　已知理想低通滤波器的频率特性

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

输入信号为 $x(t) = e^{-2t}u(t)$，求能使输入信号 $x(t)$归一化能量值的一半通过的滤波器截频 ω_c。

由式(5.155)，得

$$X(\omega) = \frac{1}{2 + j\omega}$$

则

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{2 + j\omega} & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

$x(t)$的归一化能量为

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} e^{-4t} dt = \frac{1}{4}$$

利用式(5.64)的帕斯瓦尔定律，$y(t)$的归一化能量为

$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} |y(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |Y(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} \frac{d\omega}{4+\omega^2}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_c} \frac{d\omega}{4+\omega^2} = \frac{1}{2\pi}\arctan\frac{\omega_c}{2} = \frac{1}{2}E_x = \frac{1}{8}$$

由此可得

$$\frac{\omega_c}{2} = \tan\frac{\pi}{4} = 1 \quad 即 \quad \omega_c = 2\text{rad/s}$$

5.55 频响特性为$H(\omega)$的滤波器的有效带宽定义为

$$W_{eq} = \frac{1}{|H(\omega)|^2_{max}}\int_0^{\infty} |H(\omega)|^2 d\omega \tag{5.179}$$

讨论图 5-6(a)RC 低通滤波器，

(a)求其 3dB 带宽 W_{3dB}。

(b)求其有效带宽 W_{eq}。

[redacted] (a)由式(5.91)，RC 低通滤波器的频响特性$H(\omega)$为

$$H(\omega) = \frac{1}{1+j\omega RC} = \frac{1}{1+j(\omega/\omega_0)}$$

式中 $\omega_0 = 1/RC$。

$$|H(\omega)| = \frac{1}{[1+(\omega/\omega_0)^2]^{1/2}}$$

幅频特性曲线$|H(\omega)|$如图 5-6(b)所示。当 $\omega = \omega_0 = 1/RC$ 时，$|H(\omega_0)| = 1/\sqrt{2}$。因此，$RC$ 滤波器的3dB 带宽为

$$W_{3dB} = \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

(b)由图 5-6(b)可见，$|H(0)| = 1$ 是幅度谱的最大值。将 $H(\omega)$改写为

$$H(\omega) = \frac{1}{1+j\omega RC} = \frac{1}{RC}\frac{1}{1/RC + j\omega}$$

利用式(5.179)，RC 滤波器的有效带宽为(图 5-32)

$$W_{eq} = \frac{1}{(RC)^2}\int_0^{\infty} \frac{d\omega}{(1/RC)^2+\omega^2} = \frac{1}{(RC)^2}\frac{\pi}{2/RC}\frac{\pi}{2RC}$$

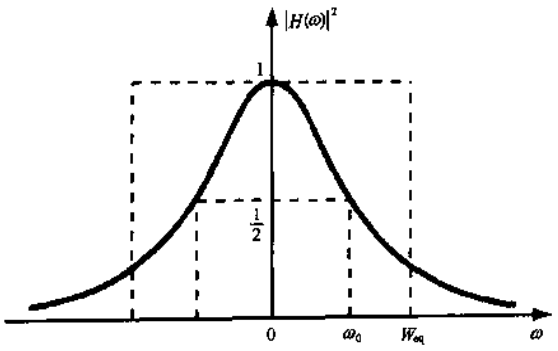


图 5-32　滤波器的带宽

5.56 图 5-6(a)中 RC 低通滤波器的上升时间 t_r 定义为单位阶跃响应由终值的 10% 上升到 90% 所需要的时间。证明

$$t_r = \frac{0.35}{f_{3dB}}$$

式中 $f_{3dB} = W_{3dB}/2\pi = 1/2\pi RC$ 是滤波器的 3dB 带宽。

[redacted] 由 RC 滤波器的频响特性 $H(\omega)$，可得单位冲激响应

$$h(t) = \frac{1}{RC}e^{-t/RC}u(t)$$

再由式(2.12)可求出单位阶跃响应 $s(t)$ 为

$$s(t) = \int_0^t h(\tau)d\tau = \int_0^t \frac{1}{RC}e^{-\tau/RC}d\tau = (1 - e^{-t/RC})u(t)$$

$s(t)$ 波形如图 5-33 所示。根据上升时间的定义

$$t_r = t_2 - t_1$$

t_1, t_2 为满足下两式的时间：

$$s(t_1) = 1 - e^{-t_1/RC} = 0.1 \rightarrow e^{-t_1/RC} = 0.9$$

$$s(t_2) = 1 - e^{-t_2/RC} = 0.9 \rightarrow e^{-t_2/RC} = 0.1$$

用上面第一式除以第二式，可得

$$e^{(t_2-t_1)/RC} = 9$$

由此可证 $t_r = t_2 - t_1 = RC\ln(9) = 2.197RC = \dfrac{2.197}{2\pi f_{3dB}} \approx \dfrac{0.35}{f_{3dB}}$

该式表明了上升时间和带宽的关系。

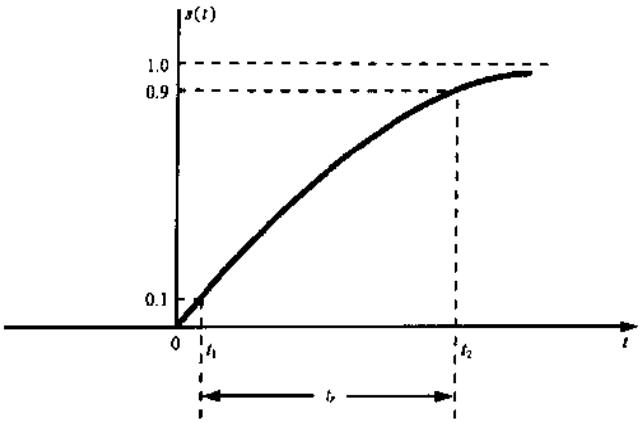


图 5-33

5.57 信号 $x(t)$ 的带宽还可以定义为包含信号能量 90% 的频带宽度，用符号 W_{90} 表示，即

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-W_{90}}^{W_{90}} |X(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^{W_{90}} |X(\omega)|^2 d\omega = 0.9E_x \qquad (5.180)$$

式中 E_x 为信号 $x(t)$ 的归一化能量。求下列信号的 W_{90}：

(a) $x(t) = e^{-at}u(t), a > 0$

(b) $x(t) = \dfrac{\sin at}{\pi t}$

[redacted] (a)由式(5.155)，有

$$x(t) = e^{-at}u(t) \leftrightarrow X(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

由式(1.14)，有

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_0^{\infty} e^{-2at}dt = \frac{1}{2a}$$

根据式(5.180)

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{W_{90}} |X(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi}\int_0^{W_{90}} \frac{d\omega}{a^2 + \omega^2} = \frac{1}{a\pi}\arctan\left(\frac{W_{90}}{a}\right) = 0.9\,\frac{1}{2a}$$

可得

$$\arctan\left(\frac{W_{90}}{a}\right) = 0.45\pi$$

所以

$$W_{90} = a\tan(0.45\pi) = 6.31a \text{ rad/s}$$

(b)由式(5.137)，得

$$s(t)=\frac{\sin at}{\pi t}\leftrightarrow X(\omega)=P_a(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<a\\ 0 & |\omega|>a\end{cases}$$

利用式(5.64)的帕斯瓦尔定律,有

$$E_x=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(\omega)|^2d\omega=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}|X(\omega)|^2d\omega=\frac{1}{\pi}\int_0^a d\omega=\frac{a}{\pi}$$

再由式(5.180),得

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{W_{90}}|X(\omega)|^2d\omega=\frac{1}{\pi}\int_0^{W_{90}}d\omega=\frac{W_{90}}{\pi}=0.9\frac{a}{\pi}$$

即得

$$W_{90}=0.9a\ \text{rad/s}$$

5.58 设 $x(t)$为一带限实信号,如图 5-34(b)所示,即

$$X(\omega)=0\qquad|\omega|>\omega_M$$

$x_s(t)$定义为

$$x_s(t)=x(t)\delta_{T_s}(t)=x(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT_s)\tag{5.181}$$

(a)画出 $T_s<\pi/\omega_M$ 和 $T_s>\pi/\omega_M$ 时$x_s(t)$的波形。

(b)分别求出 $T_s<\pi/\omega_M$ 和 $T_s>\pi/\omega_M$ 时$x_s(t)$的频谱 $X_s(\omega)$,并画图。

[redacted] (a)利用式(1.26),有

$$x_s(t)=x(t)\delta_{T_s}(t)=x(t)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT_s)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-kT_s)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(kT_s)\delta(t-kT_s)\tag{5.182}$$

当 $T_s<\pi/\omega_M$ 时,抽样信号 $x_s(t)$的波形如图 5-34(c)所示。当 $T_s>\pi/\omega_M$ 时,抽样信号 $x_s(t)$的波形如图 5-34(i)所示。

信号 $x_s(t)$称为理想抽样信号,T_s 称为抽样间隔(周期),f_s 称为抽样频率。

(b)由式(5.147)(习题为 5.25),有

$$\delta_{T_s}(t)\leftrightarrow\omega_s\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_s)\qquad\omega_s=\frac{2\pi}{T_s}$$

设

$$x_s(t)\leftrightarrow X_s(\omega)$$

根据式(5.59)的频域卷积定理,有

$$X_s(\omega)=\mathcal{F}[x(t)\delta_{T_s}(t)]=\frac{1}{2\pi}\left[X(\omega)*\omega_s\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\omega-k\omega_s)\right]$$

$$=\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(\omega)*\delta(\omega-k\omega_s)$$

利用式(1.26),可得

$$X_s(\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(\omega-k\omega_s)\tag{5.183}$$

可见,$X_s(\omega)$是 $X(\omega)$的周期延拓。$T_s<\pi/\omega_M$(或 $\omega_s>2\omega_M$)时,$X_s(\omega)$如图 5-34(f)所示;当 $T_s>\pi/\omega_M$(或 $\omega_s<2\omega_M$)时,$X_s(\omega)$如图 5-34(j)所示。由图可看出,当 $\omega_s>2\omega_M$ 时,$X_s(\omega)$中周期延拓的 $X(\omega-k\omega_s)$各波形没有重叠。当 $\omega_s<2\omega_M$ 时,$X_s(\omega)$中各波形有重叠,这就是所谓的混叠现象。

5.59 设 $x(t)$为一带限实信号,即

$$X(\omega)=0\qquad|\omega|>\omega_M$$

证明

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(kT_s)\frac{\sin\omega_M(t-kT_s)}{\omega_M(t-kT_s)}\tag{5.184}$$

式中 $T_s=\pi/\omega_M$。

[redacted] 设

$$x(t)\leftrightarrow X(\omega)$$

$$x_s(t)=x(t)\delta_{T_s}(t)\leftrightarrow X_s(\omega)$$

由式(5.183),有

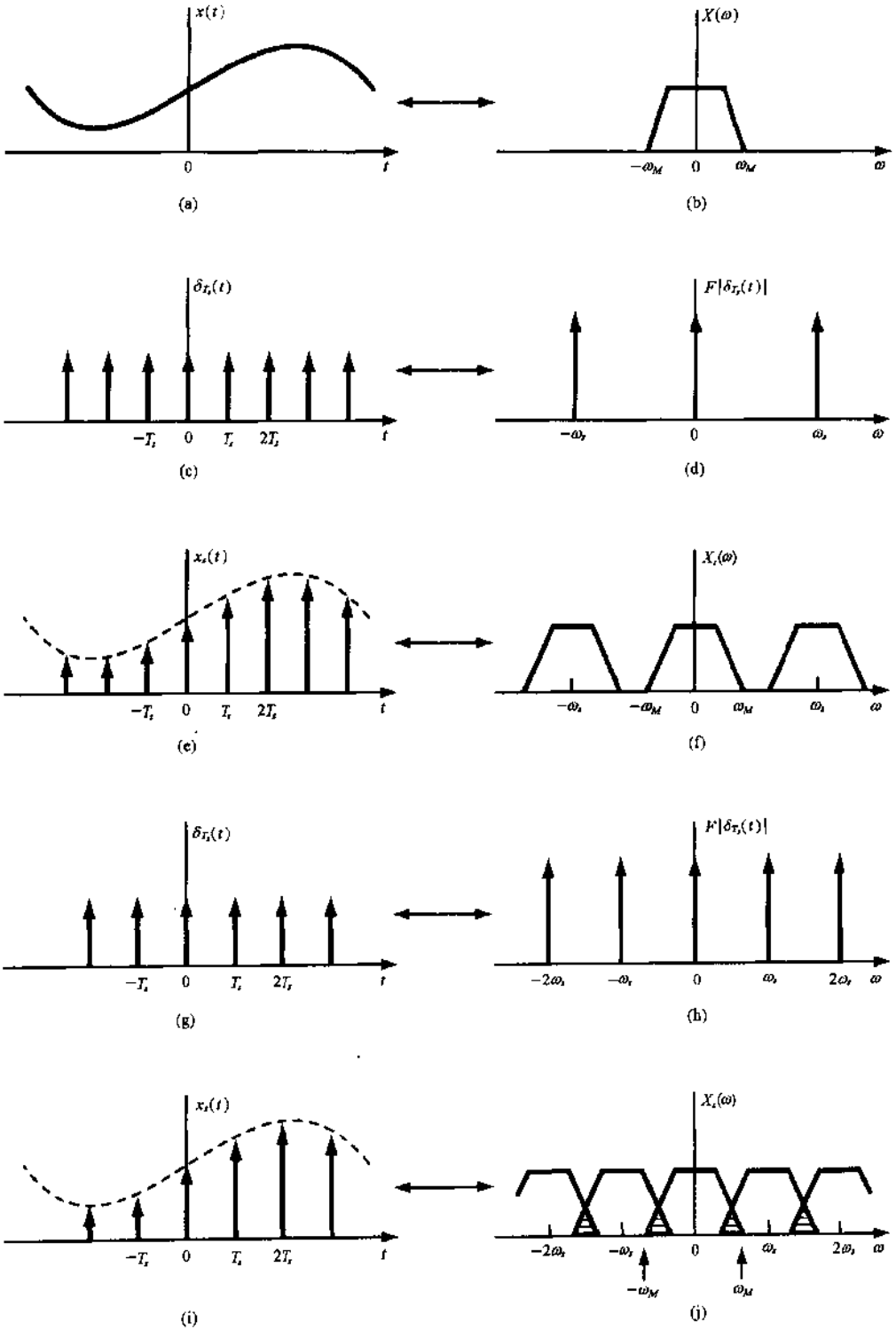


图 5-34　理想抽样

$$T_s X_s(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_s) \tag{5.185}$$

根据(1)$X(\omega)=0 \quad |\omega| > \omega_M$ 和(2)$T_s = \dfrac{\pi}{\omega_M}$

可得

$$X(\omega) = \frac{\pi}{\omega_M} X_s(\omega) \qquad |\omega| < \omega_M \tag{5.186}$$

再对式(5.182)做傅里叶变换，有

$$X_s(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)e^{-jkT_s\omega} \tag{5.187}$$

将式(5.187)代入式(5.186),得

$$X(\omega) = \frac{\pi}{\omega_M}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)e^{-jkT_s\omega} \quad |\omega| < \omega_M \tag{5.188}$$

对式(5.188)做傅里叶反变换,即得

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega \\ &= \frac{1}{2\omega_M}\int_{-\omega_M}^{\omega_M}\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)e^{j\omega(t-kT_s)}d\omega \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)\frac{1}{2\omega_M}\int_{-\omega_M}^{\omega_M} e^{j\omega(t-kT_s)}d\omega \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)\frac{\sin\omega_M(t-kT_s)}{\omega_M(t-kT_s)} \end{aligned}$$

由习题 5.58 和 5.59 可得出低通信号的均匀抽样定理:对于最高频率为 f_M 的带限信号,可以通过抽样率 $f_s \geqslant 2f_M$ 的等间隔抽样信号完全恢复。$T_s = \pi/\omega_M = 1/2f_M$ ($\omega_M = 2\pi f_M$)称为奈奎斯特间隔,$f_s = 1/T_s = 2f_M$ 称为奈奎斯特频率。

5.60 已知图 5-35(a)所示系统,理想低通滤波器的频响特性 $H(\omega)$如图 5-35(b)所示,即

$$H(\omega) = T_s P_{\omega_c}(\omega) = \begin{cases} T_s & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

证明:若 $\omega_c = \omega_s/2$,则对于任意的 T_s 下式成立。

$$y(mT_s) = x(mT_s) \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

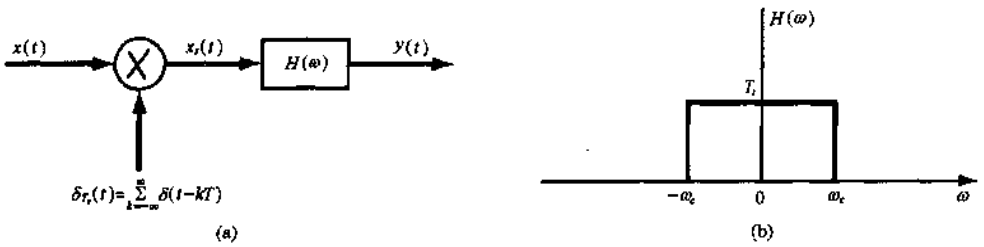


图 5-35

[redacted] 由式(5.135),理想低通滤波器的冲激响应 $h(t)$为

$$h(t) = T_s\frac{\sin\omega_c t}{\pi t} = \frac{T_s\omega_c}{\pi}\frac{\sin\omega_c t}{\omega_c t} \tag{5.189}$$

由式(5.182),得

$$x_s(t) = x(t)\delta_{T_s}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)\delta(t-kT_s)$$

根据式(2.6)并利用式(2.7)和(1.26),可求输出 $y(t)$为

$$\begin{aligned} y(t) &= x_s(t) * h(t) = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)\delta(t-kT_s)\right] * h(t) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)[h(t) * \delta(t-kT_s)] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)h(t-kT_s) \end{aligned}$$

再利用式(5.189),可得

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)\frac{T_s\omega_c}{\pi}\frac{\sin\omega_c(t-kT_s)}{\omega_c(t-kT_s)}$$

若 $\omega_c = \omega_s/2$,则 $T_s\omega_c/\pi = 1$,代入上式,有

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)\frac{\sin[\omega_s(t-kT_s)/2]}{\omega_s(t-kT_s)/2}$$

设 $t = mT_s$（m 为整数），利用 $\omega_s T_s = 2\pi$，可得

$$y(mT_s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s)\frac{\sin\pi(m-k)}{\pi(m-k)}$$

因为

$$\frac{\sin\pi(m-k)}{\pi(m-k)} = \begin{cases} 0 & m \neq k \\ 1 & m = k \end{cases}$$

所以

$$y(mT_s) = x(mT_s) \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

根据抽样定理，若 $\omega_s = 2\pi/T_s$ 大于信号 $x(t)$ 最高频率的二倍，且 $\omega_c = \omega_s/2$，则 $y(t) = x(t)$。若 $x(t)$ 不是带限信号，则 $y(t) \neq x(t)$。因此，若 $\omega_c = \omega_s/2$，则 $y(mT_s) = x(mT_s)$ 成立。

补充习题

5.61　已知全波整流正弦信号

$$x(t) = |A\sin\pi t|$$

(a)画出 $x(t)$ 草图并确定其基波周期。

(b)求 $x(t)$ 的指数傅里叶级数。

(c)求 $x(t)$ 的三角傅里叶级数。

答案　(a)$x(t)$ 草图见图 5-36，基波周期 $T_0 = 1$

(b)$x(t) = -\frac{2A}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}e^{jk2\pi t}$

(c)$x(t) = \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\cos k2\pi t$

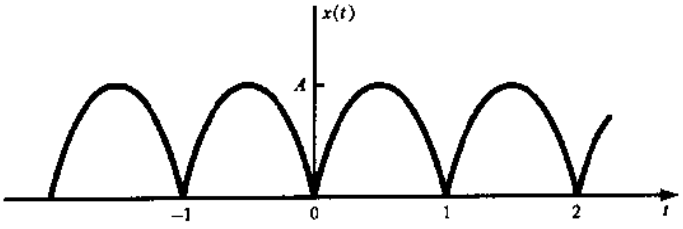


图 5-36

5.62　已知周期信号

$$x(t) = t^2 \quad -\pi < t < \pi \quad 且 \quad x(t+2\pi) = x(t)$$

求 $x(t)$ 的三角傅里叶级数。

答案　$x(t) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos kt$

5.63　利用习题 5.10 结论，求图 5-37 所示信号 $x(t)$ 的三角傅里叶级数。

答案　$x(t) = \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin k\omega_0 t \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

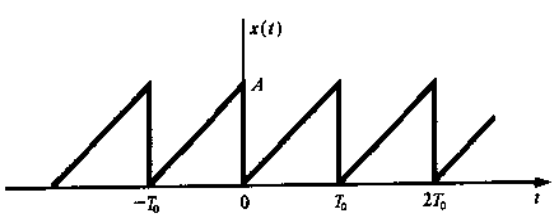


图 5-37

5.64　由式(5.8)的三角傅里叶级数推导出式(5.8)的谐波型傅里叶级数。

提示　将 $a_k\cos k\omega_0 t + b_k\sin\omega_0 t$ 改写成

$$\sqrt{a_k^2 + b_k^2}\left[\frac{a_k}{(a_k^2+b_k^2)^{1/2}}\cos k\omega_0 t + \frac{b_k}{(a_k^2+b_k^2)^{1/2}}\sin k\omega_0 t\right]$$

再利用三角公式 $\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$ 即可推出。

5.65 证明:周期信号 $x(t)$的均方值等于其各次谐波均方值之和。

提示 利用式(5.21)傅里叶级数的帕斯瓦尔定律和式(5.168)。

5.66 证明:若

$$x(t)\leftrightarrow X(\omega)$$

则

$$x^{(n)}(t)=\frac{d^n(t)}{dt^n}\leftrightarrow(j\omega)^nX(\omega)$$

提示 重复使用式(5.35)的时域微分特性。

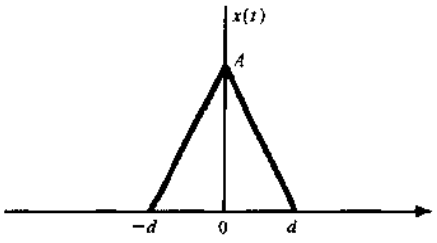


图 5-38

5.67 利用时域微分特性求图 5-38 所示三角脉冲信号的傅里叶变换。

答案 $Ad\left[\frac{\sin(\omega d/2)}{\omega d/2}\right]^2$

5.68 求 $X(\omega)=\frac{1}{(a+j\omega)^N}$的傅里叶反变换。

答案 $\frac{t^{N-1}}{(N-1)!}e^{-at}u(t)$

5.69 求 $X(\omega)=\frac{1}{2-\omega^2+j3\omega}$的傅里叶反变换。

提示 $2-\omega^2+3j\omega=2+(j\omega)^2+3j\omega=(1+j\omega)(2+j\omega)$

答案 $x(t)=(e^{-t}-e^{-2t})u(t)$

5.70 证明式(5.56)的频域微分特性,

$$(-jt)x(t)\leftrightarrow\frac{dX(\omega)}{d\omega}$$

提示 利用式(5.31)定义,解题过程同习题 5.28。

5.71 求下列信号的傅里叶变换。

(a)$x(t)=\cos\omega_0 tu(t)$

(b)$x(t)=\sin\omega_0 tu(t)$

(c)$x(t)=e^{-at}\cos\omega_0 tu(t)$, $a>0$

(d)$x(t)=e^{-at}\sin\omega_0 tu(t)$, $a>0$

答案 (a)$X(\omega)=\frac{\pi}{2}\delta(\omega-\omega_0)+\frac{\pi}{2}\delta(\omega+\omega_0)+\frac{j\omega}{(j\omega)^2+\omega_0^2}$

(b)$X(\omega)=\frac{\pi}{2j}\delta(\omega-\omega_0)-\frac{\pi}{2j}\delta(\omega+\omega_0)+\frac{\omega_0}{(j\omega)^2+\omega_0^2}$

(c)$X(\omega)=\frac{a+j\omega}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}$

(d)$X(\omega)=\frac{\omega_0}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}$

5.72 已知信号 $x(t)$的傅里叶变换 $X(\omega)$为

$$X(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<1\\ 0 & |\omega|>1\end{cases}$$

考虑信号 $y(t)=\frac{d^2x(t)}{dt^2}$, 计算$\int_{-\infty}^{\infty}|y(t)|^2dt$ 的值。

答案 $1/3\pi$

5.73 设实信号 $x(t)$的傅里叶变换为 $X(\omega)$。与 $x(t)$有关的解析信号 $x_+(t)$定义为

$$x_+(t)=x(t)+j\hat{x}(t)$$

式中 $\hat{x}(t)$是 $x(t)$的希尔伯特变换。

(a)求 $x_+(t)$的傅里叶变换 $X_+(\omega)$。

(b)求与 $\cos\omega_0 t$ 有关的解析信号$x_+(t)$及其傅里叶变换 $X_+(\omega)$。

答案 (a)$X_+(\omega)=2X(\omega)u(\omega)=\begin{cases}2X(\omega) & \omega>0\\ 0 & \omega<0\end{cases}$

(b)$x_+(t)=e^{j\omega_0 t}$, $X_+(\omega)=2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

5.74 已知 LTI 系统的频响特性 $H(\omega)$,求系统单位阶跃响应 $s(t)$的傅里叶变换 $S(\omega)$。

提示 利用式(2.12)和(5.57)的积分特性。

答案 $S(\omega)=\pi H(0)\delta(\omega)+(1/j\omega)H(\omega)$

5.75 求图 5-39 所示 *RC* 滤波器的频响特性$H(\omega)$，并判断该滤波器的类型。

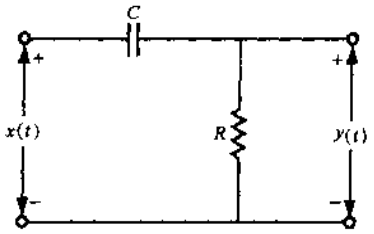


图 5-39

答案 $H(\omega)=\dfrac{j\omega}{(1/RC)+j\omega}$，高通滤波器。

5.76 求包含信号 $x(t)=\dfrac{1}{t^2+a^2}$ 99%能量的带宽。

答案 $W_{99}=2.3/a$ rad/s 或 $f_{99}=0.366/a$ Hz。

5.77 频域取样定理表述为：如果一个实信号 $x(t)$ 为时限信号，即

$$x(t)=0 \qquad |t|>t_M$$

则它的傅里叶变换 $X(\omega)$ 可由其间隔为 π/t_M 的等间隔点上的取样值 $X(n\pi/t_M)$ 惟一表示，即 $X(\omega)$ 可由下式表示

$$X(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X\left(\frac{n\pi}{t_M}\right)\frac{\sin(\omega t_M-n\pi)}{\omega t_M-n\pi}$$

证明上述频域取样定理。

提示 把 $x(t)$ 展开成傅里叶级数，再按习题 5.59 的方法去做。

第 6 章　离散时间信号与系统的傅里叶分析

6.1　前言

本章将介绍离散时间信号(序列)和系统的傅里叶分析。离散时间傅里叶分析是离散信号分析的基础。正如将要看到的,离散时间傅里叶分析和连续时间傅里叶分析有很多共同之处和不同之处。

6.2　离散傅里叶级数

A. 周期序列

在第一章中曾定义过一个周期性的离散(连续)时间信号 $x[n]$,有一正整数 N 对任意 n 都满足

$$x[n+N]=x[n] \tag{6.1}$$

$x[n]$的基本周期 N_0 是满足式(6.1)的 N 的最小正整数。

正如在 1.4 节中看到的,复指数序列

$$x[n]=e^{j(2\pi/N_0)n}=e^{j\Omega_0 n} \tag{6.2}$$

其中 $\Omega_0=2\pi/N_0$,是以 N_0 为基本周期的周期序列。正如我们在 1.4C 讨论过的,离散时间和连续时间的复指数一个非常重要的区别是信号 $e^{j\omega_0 t}$ 中不同的 ω_0 值表示不同的信号,而 $e^{j\Omega_0 n}$ 中 Ω_0 为 2π 的整数倍时信号是相同的,即

$$e^{j(\Omega_0+2\pi k)n}=e^{j\Omega_0 n}e^{j2\pi kn}=e^{j\Omega_0 n} \tag{6.3}$$

令

$$\Psi_k[n]=e^{jk\Omega_0 n}\qquad \Omega_0=\frac{2\pi}{N_0}\qquad k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots \tag{6.4}$$

通过式(6.3)得到

$$\Psi_0[n]=\Psi_{N_0}[n]\quad \Psi_1[n]=\Psi_{N_0+1}[n]\cdots\Psi_k[n]=\Psi_{N_0+k}[n]\cdots \tag{6.5}$$

更加一般地,有

$$\Psi_k[n]=\Psi_{k+mN_0}[n]\quad m\text{ 为整数} \tag{6.6}$$

由此可知,序列 $\Psi_k[n]$仅在 k 取N_0 个连续整数时是不同的。

B. 离散傅里叶级数表示

基本周期为 N_0 的周期信号 $x[n]$的离散傅里叶级数表示为

$$x[n]=\sum_{k=0}^{N_0-1}c_k e^{jk\Omega_0 n}\qquad \Omega_0=\frac{2\pi}{N_0} \tag{6.7}$$

其中 c_k 是傅里叶系数,可由下式得出(习题 6.2):

$$c_k=\frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1}x[n]e^{-jk\Omega_0 n} \tag{6.8}$$

由式(6.5)[或式(6.6)],式(6.7)或(6.8)可重写成

$$x[n]=\sum_{k=\langle N_0\rangle}c_k e^{jk\Omega_0 n}\qquad \Omega_0=\frac{2\pi}{N_0} \tag{6.9}$$

$$c_k=\frac{1}{N_0}\sum_{n=\langle N_0\rangle}x[n]e^{-jk\Omega_0 n} \tag{6.10}$$

其中 $\sum_{k=\langle N_0\rangle}$ 表示对下标 k 求和，k 的取值范围为一个连续的 N_0 点整数。令式(6.10)中的 $k=0$ 则可得到

$$c_0 = \frac{1}{N_0}\sum_{n=\langle N_0\rangle} x[n] \tag{6.11}$$

这表示 c_0 为 $x[n]$在一周期中的平均值。傅里叶系数 c_k 通常被作为$x[n]$的谱系数。

C. 离散傅里叶级数的收敛

由于离散傅里叶级数与连续时间的情况相反，是一个有限的级数，故离散傅里叶级数没有收敛问题。

D. 傅里叶级数的特性

1. 傅里叶级数的周期性

从式(6.5)和(6.7)[或式(6.9)]可得

$$c_{k+N_0} = c_k \tag{6.12}$$

这表示傅里叶级数系数 c_k 是周期的，它的基本周期为 N_0。

2. 对偶性

从式(6.12)我们看到傅里叶系数 c_k 是一个以N_0 为基本周期的周期序列。那么把 c_k 写成 $c[k]$，则式(6.10)可重写为：

$$c[k] = \sum_{n=\langle N_0\rangle} \frac{1}{N_0} x[n] e^{-jk\Omega_0 n} \tag{6.13}$$

令式(6.13)中的 $n=-m$，则

$$c[k] = \sum_{m=\langle N_0\rangle} \frac{1}{N_0} x[-m] e^{jk\Omega_0 m}$$

令上式的 $k=n$，$m=k$，得到

$$c[n] = \sum_{k=\langle N_0\rangle} \frac{1}{N_0} x[-k] e^{jn\Omega_0 n} \tag{6.14}$$

比较式(6.14)与(6.9)，得到$(1/N_0)x[-k]$是 $c[n]$的傅里叶系数。如果我们用符号

$$x[n] \overset{\text{DFS}}{\longleftrightarrow} c_k = c[k] \tag{6.15}$$

表示离散傅里叶系数，则由式(6.14)有

$$c[n] \overset{\text{DFS}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{N_0} x[-k] \tag{6.16}$$

式(6.16)称为离散傅里叶级数的对偶性。

3. 其他性质

当 $x[n]$为实数时，从式(6.8)[或式(6.10)]及式(6.12)得

$$c_{-k} = c_{N_0-k} = c_k^* \tag{6.17}$$

其中 * 表示共轭复数。

奇偶序列

当 $x[n]$为实数，令

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n]$$

$x_e[n]$和 $x_o[n]$分别表示 $x[n]$的奇分量和偶分量。令

$$x[n] \overset{\text{DFS}}{\longleftrightarrow} c_k$$

则

$$x_e[n] \overset{\text{DFS}}{\longleftrightarrow} \text{Re}[c_k] \tag{6.18a}$$

$$x_o[n] \xleftrightarrow{\text{DFS}} j\text{Im}[c_k] \tag{6.18b}$$

那么我们得到：如果 $x[n]$是实偶的，则它的傅里叶系数是实数；如果 $x[n]$是实奇的，则它的傅里叶系数是虚数。

E. 帕斯瓦尔定理

如果由式(6.9)将 $x[n]$表示为离散傅里叶级数，则有(习题 6.10)

$$\frac{1}{N_0}\sum_{n=\langle N_0\rangle} |x[n]|^2 = \sum_{k=\langle N_0\rangle} |c_k|^2 \tag{6.19}$$

式(6.19)称为离散傅里叶级数的 Parseval 恒等式(或 Parseval 定理)。

6.3 傅里叶变换

A. 从离散傅里叶级数到傅里叶变换

令 $x[n]$表示一个非周期的有限长度的序列，即对于某一个的正整数 N_1，都有

$$x[n] = 0 \qquad |n| > N_1$$

图 6-1(a)就是这样的一个序列。令 $x_{N_0}[n]$为一个由 $x[n]$重复形成的、如图 6-1(b)所示以 N_0 为基本周期的周期序列。如果令 $N_0 \to \infty$，则有

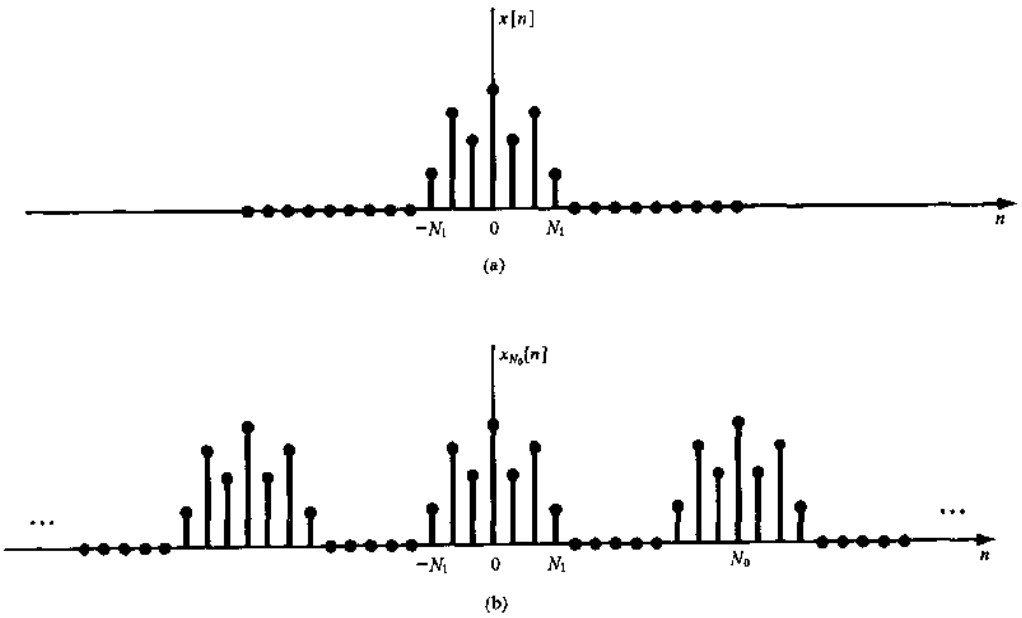


图 6-1

$$\lim_{N_0\to\infty} x_{N_0}[N] = x[n] \tag{6.20}$$

离散傅里叶级数 $x_{N_0}[n]$由下式给出：

$$x_{N_0}[n] = \sum_{k=\langle N_0\rangle} c_k e^{jk\Omega_0 n} \qquad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} \tag{6.21}$$

其中

$$c_k = \frac{1}{N_0}\sum_{n=\langle N_0\rangle} x_{N_0}[n]e^{-jk\Omega_0 n} \tag{6.22a}$$

由于 $x_{N_0}[n] = x[n]$，$|n| \leqslant N_1$，在区间外 $x[n] = 0$，式(6.22a)可以重写为

$$c_k = \frac{1}{N_0}\sum_{n=-N_1}^{N_1} x[n]e^{-jk\Omega_0 n} = \frac{1}{N_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-jk\Omega_0 n} \tag{6.22b}$$

定义 $X(\Omega)$为

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} \tag{6.23}$$

则式(6.22b)中的傅里叶系数 c_k 可以表示为

$$c_k = \frac{1}{N_0}X(k\Omega_0) \tag{6.24}$$

将式(6.24)代入式(6.21),有

$$x_{N_0}[n] = \sum_{k=\langle N_0\rangle} \frac{1}{N_0}X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n} \tag{6.25}$$

或

$$x_{N_0}[n] = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=\langle N_0\rangle} X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n}\Omega_0$$

由式(6.23)知,$X(\Omega)$和 $e^{j\Omega n}$都以 2π 为周期,因此乘积 $X(\Omega)e^{j\Omega n}$同样是以 2π 为周期的。正如图 6-2 所示,式(6.25)中每个求和项表示一个以 $X(k\Omega_0)e^{jk\Omega_0 n}$为高和 Ω_0 为宽的长方形的面积。如果 $N_0\to\infty$,则 $\Omega_0=2\pi/N_0$ 变成无限小($\Omega_0\to 0$),式(6.25)成为一个积分。另外,因为式(6.25)的求和是以 $\Omega_0=2\pi/N_0$ 为宽度的 N_0 个连续整数,积分的整个区间的宽度为 2π。那么,由 $N_0\to\infty$及式(6.20),式(6.25)变为

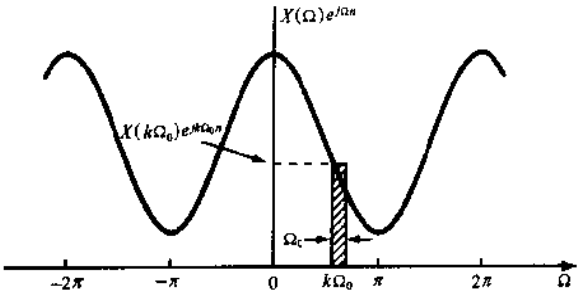


图 6-2

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega \tag{6.26}$$

由于 $x(\Omega)e^{j\Omega n}$是以 2π 为周期的,式(6.26)的积分区间可以由任何长度为 2π 的区间。

B. 傅里叶变换对

式(6.23)定义的函数 $X(\Omega)$称为 $x[n]$的傅里叶变换,式(6.26)定义了 $X(\Omega)$的傅里叶反变换,用符号可表示为

$$X(\Omega) = \mathcal{F}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} \tag{6.27}$$

$$x[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X(\Omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega \tag{6.28}$$

我们称 $x[n]$和 $X(\Omega)$构成了一个傅里叶变换对

$$x[n] \longleftrightarrow X(\Omega) \tag{6.29}$$

等式(6.27)和(6.28)是式(5.31)和(5.32)关于离散时间的对应。

C. 傅里叶谱

通常 $x[n]$的傅里叶变换$X(\Omega)$是复数,可以表示为

$$X(\Omega) = |X(\Omega)|e^{j\varphi(\Omega)} \tag{6.30}$$

与连续时间时的情况相同,一个非周期序列 $x[n]$的傅里叶变换 $X(\Omega)$是离散序列$x[n]$的频域表示,称之为 $x[n]$的谱(或傅里叶谱)。$|X(\Omega)|$称为 $x[n]$的幅度谱,$\varphi(\Omega)$称为 $x[n]$的

相位谱。进一步地，如果 $x[n]$是实数，幅度谱$|X(\Omega)|$是关于 Ω 的偶函数，相位谱$\varphi(\Omega)$是关于 Ω 的奇函数。

D. $X(\Omega)$的收敛

与连续时间时的情况相似，$X(\Omega)$收敛的充要条件是 $x[n]$绝对可和

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty \tag{6.31}$$

E. 傅里叶变换与 z 变换的关系

式(6.27)定义 $x[n]$的傅里叶变换为

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} \tag{6.32}$$

$x[n]$的 z 变换[式(4.3)]为

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \tag{6.33}$$

比较式(6.32)与(6.33)可以发现，如果 $X(z)$的收敛域包含单位圆，那么 $x[n]$的傅里叶变换 $X(\Omega)$与 $X(z)$单位圆上的值相等，即

$$X(\Omega) = X(z)|_{z=e^{j\Omega}} \tag{6.34}$$

注意，由于式(6.33)的表示的是 $X(z)$，那么式(6.32)中的求和也可由 $X(e^{j\Omega})$表示。因此在本书的其他部分，任何把傅里叶变换与 z 变换联系起来的时候，$X(\Omega)$和 $X(e^{j\Omega})$都表示同样的意义。

虽然傅里叶变换是关于 $z=e^{j\Omega}$的 z 变换，但是不能无条件地假设序列 $x[n]$的傅里叶变换是用 $e^{j\Omega}$取代 z 的z 变换。如果 $x[n]$满足(6.31)式，$x[n]$的傅里叶变换可以由 z 变换令$z=e^{j\Omega}$得到。因为 $X(z)$的收敛域包含单位圆，即$|e^{j\Omega}|=1$。对不是绝对可和的序列这一点一般来说是不成立的。下面的例子将会说明以上的叙述。

例 6.1 考察单位脉冲序列 $\delta[n]$

由式(4.14)中 $\delta[n]$的 z 变换是：

$$\mathcal{Z}\{\delta[n]\} = 1 \qquad |z| \geqslant 0 \tag{6.35}$$

由定义式(6.27)和(1.45)，$\delta[n]$的傅里叶变换为

$$\mathcal{F}\{\delta[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n]e^{-j\Omega n} = 1 \tag{6.36}$$

因此，$\delta[n]$的傅里叶变换与 z 变换相同。注意 $\delta[n]$是绝对可和的。$\delta[n]$的 z 变换收敛域包含单位圆。

例 6.2 考察因果指数序列

$$x[n] = a^n u[n] \qquad a \text{ 是实数}$$

由式(4.9)$x[n]$的 z 变换为

$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z| > |a|$$

因此，$|a|<1$时 $X(e^{j\Omega})$存在，因为 $X(z)$的收敛域包含单位圆，即

$$X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{1-ae^{-j\Omega}} \qquad |a| < 1 \tag{6.37}$$

由定义式(6.27)和(1.91)，$x[n]$的傅里叶变换为

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n]e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\Omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\Omega})^n$$

$$= \frac{1}{1-ae^{-j\Omega}} \qquad |ae^{-j\Omega}| = |a| < 1 \tag{6.38}$$

比较式(6.37)与(6.38),得

$$X(\Omega) = X(z)\mid_{z=e^{j\Omega}}$$

注意 $x[n]$是绝对可和。

例 6.3　考察单位阶跃序列 $u[n]$

由式(4.16)$u[n]$的 z 变换为:

$$\mathscr{Z}\{u[n]\} = \frac{1}{1-z^{-1}} \qquad |z|>1 \tag{6.39}$$

傅里叶变换不能由 z 变换得到,因为 $u[n]$的 z 变换的收敛域不包含单位圆。注意单位阶跃序列 $u[n]$不是绝对可加的。$u[n]$的傅里叶变换为(习题 6.28)

$$\mathscr{F}\{u[n]\} = \pi\delta(\Omega) + \frac{1}{1-e^{-j\Omega}} \qquad |\Omega|\leqslant\pi \tag{6.40}$$

6.4　傅里叶变换的性质

本节要讨论的是傅里叶变换的基本性质。离散傅里叶变换的基本性质与连续时间傅里叶变换有很多类似点和不同点。当 z 变换的收敛域包含单位圆时,有很多性质也和 z 变换的性质类似。

A. 周期性

$$X(\Omega+2\pi) = X(\Omega) \tag{6.41}$$

由式(6.41),在离散时间情况下,Ω(弧度)的范围为 $0\leqslant\Omega<2\pi$ 或 $-\pi\leqslant\Omega<\pi$,在连续时间的情况下,ω(弧度/秒)的范围为 $-\infty<\omega<\infty$。

B. 线性

$$a_1x_1[n] + a_2x_2[n] \leftrightarrow a_1X_1(\Omega) + a_2X_2(\Omega) \tag{6.42}$$

C. 时域位移

$$x[n-n_0] \leftrightarrow e^{-j\Omega n_0}X(\Omega) \tag{6.43}$$

D. 频域位移

$$e^{j\Omega_0 n}x[n] \leftrightarrow X(\Omega-\Omega_0) \tag{6.44}$$

E. 共轭

$$x^*[n] \leftrightarrow X^*(-\Omega) \tag{6.45}$$

F. 时间翻转

$$x[-n] \leftrightarrow X(-\Omega) \tag{6.46}$$

G. 时域尺度变换

5.4 节 D 中的连续时间傅里叶变换的尺度变换表示为[式(5.52)]

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|}X\left(\frac{\omega}{a}\right) \tag{6.47}$$

然而,在离散时间的情况下,若 a 不是整数,$x[an]$就不是一个序列。另一方面,如果 a 是一个整数,例如 $a=2$,那么 $x[2n]$仅包含 $x[n]$的偶数样点。因此,离散时间中的时域尺度变换与式(6.47)有些不同。

令 m 为一正整数,定义序列

$$x_{(m)}[n]=\begin{cases}x[n/m]=x[k] & n=km,k\text{ 为整数}\\ 0 & n\neq km\end{cases} \tag{6.48}$$

则

$$x_{(m)}[n]\leftrightarrow X(m\Omega) \tag{6.49}$$

式(6.49)为式(6.47)的离散时间对应式。它再次表述了时间与频率的逆关系,即如果某信号在时域被扩展($m>1$),它的傅里叶变换将被压缩(习题 6.22)。注意 $X(m\Omega)$是以 $2\pi/m$ 为周期的,因为 $X(\Omega)$是以 2π 为周期的。

H. 对偶性

5.4 节 F 中连续时间傅里叶变换的对偶性表示为[式(5.54)]

$$X(t)\leftrightarrow 2\pi x(-\omega) \tag{6.50}$$

离散时间变换没有与之对应的性质。然而,离散时间傅里叶变换和连续时间傅里叶级数存在对偶性。设

$$x[n]\leftrightarrow X(\Omega)$$

由式(6.27)和(6.41),得

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\Omega n} \tag{6.51}$$

$$X(\Omega+2\pi)=X(\Omega) \tag{6.52}$$

由于 Ω 是连续变量,令式(6.51)中的 $\Omega=t$ 及 $n=-k$,得

$$X(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[-k]e^{jkt} \tag{6.53}$$

由于 $X(t)$是以 $T_0=2\pi$ 为周期的,基本频率为 $\omega_0=2\pi/T_0=1$,式(6.53)说明 $X(t)$的傅里叶级数系数为 $x[-k]$。此对偶关系表示为

$$X(t)\overset{\text{FS}}{\longleftrightarrow}c_k=x[-k] \tag{6.54}$$

其中 FS 表示傅里叶级数,c_k 是它的傅里叶系数。

I. 频域微分

$$nx[n]\leftrightarrow j\frac{dX(\Omega)}{d\Omega} \tag{6.55}$$

J. 差分

$$x[n]-x[n-1]\leftrightarrow(1-e^{-j\Omega})X(\Omega) \tag{6.56}$$

序列 $x[n]-x[n-1]$称为一阶差分序列。式(6.56)容易由线性性质式(6.42)和时移性质式(6.43)得到。

K. 累加

$$\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]\leftrightarrow\pi X(0)\delta(\Omega)+\frac{1}{1-e^{-j\Omega}}X(\Omega)\quad |\Omega|\leqslant\pi \tag{6.57}$$

注意离散时间累加与连续时间积分相对应。式(6.57)右边的冲激项反应了累加得出的直流或平均值。

L. 卷积

$$x_1[n]*x_2[n]\leftrightarrow X_1(\Omega)X_2(\Omega) \tag{6.58}$$

与 z 变换类似,卷积性质在离散时间 LTI 系统的研究中起着重要作用。

M. 相乘

$$x_1[n]x_2[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}X_1(\Omega) \otimes X_2(\Omega) \tag{6.59}$$

其中⊗表示由[式(2.70)]定义的周期卷积

$$X_1(\Omega) \otimes X_2(\Omega) = \int_{2\pi} X_1(\theta)X_2(\Omega - \theta)d\theta \tag{6.60}$$

相乘性质式(6.59)是式(6.58)的对偶特性。

N. 附加性质

如果 $x[n]$是实数,令

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n]$$

其中 $x_e[n]$与 $x_o[n]$分别是 $x[n]$的偶和奇分量。令

$$x[n] \leftrightarrow X(\Omega) = A(\Omega) + jB(\Omega) = |X(\Omega)|e^{\theta(\Omega)} \tag{6.61}$$

则

$$X(-\Omega) = X^*(\Omega) \tag{6.62}$$

$$x_e[n] \leftrightarrow \mathrm{Re}\{X(\Omega)\} = A(\Omega) \tag{6.63a}$$

$$x_o[n] \leftrightarrow j\mathrm{Im}\{X(\Omega)\} = jB(\Omega) \tag{6.63b}$$

式(6.62)是 $x[n]$为实数的充要条件。由式(6.62)和(6.61)得

$$A(-\Omega) = A(\Omega) \qquad B(-\Omega) = -B(\Omega) \tag{6.64a}$$

$$|X(-\Omega)| = |X(\Omega)| \qquad \theta(-\Omega) = -\theta(\Omega) \tag{6.64b}$$

由式(6.63a)、(6.63b)和(6.64a)看到,如果 $x[n]$是偶实数,那么 $X(\Omega)$是偶实数,当 $x[n]$是奇实数时,$X(\Omega)$是奇复数。

O. 帕斯瓦尔关系

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]x_2[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(\Omega)X_2(-\Omega)d\Omega \tag{6.65}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega \tag{6.66}$$

式(6.66)被称为离散时间傅里叶变换的 Parseval 恒等式(或 Parseval 定理)。

表 6.1 包含了本节所述傅里叶变换性质。一些常用序列和它们的傅里叶变换由表 6.2 给出。

表 6.1　傅里叶变换的性质

性　质	序　列	傅里叶变换
	$x[n]$	$X(\Omega)$
	$x_1[n]$	$X_1(\Omega)$
	$x_2[n]$	$X_2(\Omega)$
周期性	$x[n]$	$X(\Omega+2\pi)=X(\Omega)$
线性	$a_1x_1[n]+a_2x_2[n]$	$a_1X_1(\Omega)+a_2X_2(\Omega)$
时移	$x[n-n_0]$	$e^{-j\Omega n_0}X(\Omega)$
频移	$e^{j\Omega_0 n}x[n]$	$X(\Omega-\Omega_0)$
时间翻转	$x[-n]$	$X(-\Omega)$
时域尺度变换	$x_{(m)}[n]=\begin{cases}x[n/m] & n=km\\ 0 & n\neq km\end{cases}$	$X(m\Omega)$

续表

性　质	序　列	傅里叶变换
频域微分	$nx[n]$	$j\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$
一阶差分	$x[n]-x[n-1]$	$(1-e^{-j\Omega})X(\Omega)$
累加	$\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$	$\pi X(0)\delta(\Omega)+\frac{1}{1-e^{-j\Omega}}X(\Omega)$　　$\lvert\Omega\rvert\leqslant\pi$
卷积	$x_1[n]*x_2[n]$	$X_1(\Omega)X_2(\Omega)$
乘积	$x_1[n]x_2[n]$	$\frac{1}{2\pi}X_1(\Omega)\otimes X_2(\Omega)$
实序列	$x[n]=x_e[n]+x_o[n]$	$X(\Omega)=A(\Omega)+jB(\Omega)$　　$X(-\Omega)=X^*(\Omega)$
偶分量	$x_e[n]$	$\mathrm{Re}[X(\Omega)]=A(\Omega)$
奇分量	$x_o[n]$	$j\mathrm{Im}[X(\Omega)]=jB(\Omega)$
帕斯瓦尔等式	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_1[n]x_2[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X_1(\Omega)X_2(-\Omega)d\Omega$	
	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\lvert x[n]\rvert^2=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}\lvert X(\Omega)\rvert^2d\Omega$	

表 6.2　常用傅里叶变换对

$x[n]$	$X(\Omega)$
$\delta[n]$	1
$\delta[n-n_0]$	$e^{-j\Omega n_0}$
$x[n]=1$	$2\pi\delta(\Omega),\lvert\Omega\rvert\leqslant\pi$
$e^{j\Omega_0 n}$	$2\pi\delta(\Omega-\Omega_0),\lvert\Omega\rvert,\lvert\Omega_0\rvert\leqslant\pi$
$\cos\Omega_0 n$	$\pi[\delta(\Omega-\Omega_0)-\delta(\Omega+\Omega_0)],\lvert\Omega\rvert,\lvert\Omega_0\rvert\leqslant\pi$
$\sin\Omega_0 n$	$-j\pi[\delta(\Omega-\Omega_0)-\delta(\Omega+\Omega_0)],\lvert\Omega\rvert,\lvert\Omega_0\rvert\leqslant\pi$
$u[n]$	$\pi\delta(\Omega)+\frac{1}{1-e^{-j\Omega}},\lvert\Omega\rvert\leqslant\pi$
$-u[-n-1]$	$-\pi\delta(\Omega)+\frac{1}{1-e^{-j\Omega}},\lvert\Omega\rvert\leqslant\pi$
$a^n u[n],\lvert a\rvert<1$	$\frac{1}{1-ae^{-j\Omega}}$
$-a^n u[-n-1],\lvert a\rvert>1$	$\frac{1}{1-ae^{-j\Omega}}$
$(n+1)a^n u[n],\lvert a\rvert<1$	$\frac{1}{(1-ae^{-j\Omega})^2}$
$a^{\lvert n\rvert},\lvert a\rvert<1$	$\frac{1-a^2}{1-2a\cos\Omega+a^2}$
$x[n]=\begin{cases}1 & \lvert n\rvert\leqslant N_1\\ 0 & \lvert n\rvert>N_1\end{cases}$	$\frac{\sin[\Omega(N_1+\frac{1}{2})]}{\sin(\Omega/2)}$
$\frac{\sin Wn}{\pi n},0<W<\pi$	$X(\Omega)=\begin{cases}1 & 0\leqslant\lvert\Omega\rvert\leqslant W\\ 0 & W\leqslant\lvert\Omega\rvert\leqslant\pi\end{cases}$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-kN_0]$	$\Omega_0\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-k\Omega_0),\Omega_0=\frac{2\pi}{N_0}$

6.5　离散时间 LTI 系统频率响应

A. 频率响应

在 2.6 节中曾证明了离散时间 LTI 系统的输出 $y[n]$ 等于输入 $x[n]$ 和脉冲响应 $h[n]$ 的卷积，即

$$y[n]=x[n]*h[n] \tag{6.67}$$

由式(6.58)卷积特性,得:

$$Y(\Omega) = X(\Omega)H(\Omega) \tag{6.68}$$

其中 $Y(\Omega)$, $X(\Omega)$和 $H(\Omega)$分别为 $y[n]$, $x[n]$和 $h[n]$的傅里叶变换。由式(6.68)得

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} \tag{6.69}$$

式(6.67)和(6.68)表示的关系如图 6-3 所示。令

$$H(\Omega) = |H(\Omega)| e^{j\theta_H(\Omega)} \tag{6.70}$$

$H(\Omega)$称为系统的频率响应,$|H(\Omega)|$是系统的幅度响应,$\theta_H(\Omega)$是系统的相位响应。

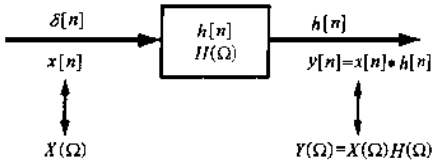


图 6-3　离散 LTI 系统的输入输出关系

考察复指数序列

$$x[n] = e^{j\Omega_0 n} \tag{6.71}$$

如果设式(4.1)中的 $z = e^{j\Omega_0}$,则得到

$$y[n] = H(e^{j\Omega_0})e^{j\Omega_0 n} = H(\Omega_0)e^{j\Omega_0 n} \tag{6.72}$$

与第 2 章 2.8 节类似,复指数序列 $e^{j\Omega_0 n}$是 LTI 系统的特征函数,是 $H(\Omega_0)$对应的特征值。更进一步,由线性特性式(6.42),如果输入 $x[n]$是周期的,它的离散傅里叶级数为

$$x[n] = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} c_k e^{jk\Omega_0 n} \qquad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} \tag{6.73}$$

那么相应的输出 $y[n]$也是周期的,它的离散傅里叶级数为

$$y[n] = \sum_{k=\langle N_0 \rangle} c_k H(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n} \tag{6.74}$$

如果 $x[n]$是非周期的,那么由式(6.68)和(6.28),相应的输出 $y[n]$可表示为

$$y[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{\langle 2\pi \rangle} H(\Omega)X(\Omega)e^{j\Omega n}\mathrm{d}\Omega \tag{6.75}$$

B. *由差分方程描述的 LTI 系统*

如 2.9 节所述,许多实际的离散时间 LTI 系统可由常系数线性差分方程描述的,形式为

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \tag{6.76}$$

其中 M≤N。对式(6.67)两边做傅里叶变换,用式(6.42)的线性特性和式(6.43)的时移特性,得

$$\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\Omega} Y(\Omega) = \sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\Omega} X(\Omega)$$

或者等价于

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\Omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-jk\Omega}} \tag{6.77}$$

式(6.77)的结果与 z 变换 $H(z) = Y(z)/X(z)$中 $z = e^{j\Omega}$[式(4.44)]相同,即

$$H(\Omega) = H(z)|_{z=e^{j\Omega}} = H(e^{j\Omega})$$

C. *频率响应的周期性*

由式(6.41)得

$$H(\Omega) = H(\Omega + 2\pi) \tag{6.78}$$

与连续时间系统的频率响应不同,所有离散时间 LTI 系统是以 2π 为周期的。因此,只需观察系统在频率范围 $0 \leqslant \Omega < 2\pi$ 或者 $-\pi \leqslant \Omega < \pi$ 上的频率响应。

6.6 离散正弦序列的系统响应

A. 系统响应

我们分别用 $y_c[n]$, $y_s[n]$和 $y[n]$表示 $\cos\Omega n$, $\sin\Omega n$ 和 $e^{j\Omega n}$的系统响应，如图 6-4 所示。因为 $e^{j\Omega n}=\cos\Omega n+j\sin\Omega n$，由式(6.72)和系统的线性特性有

$$y[n]=y_c[n]+jy_s[n]=H(\Omega)e^{j\Omega n} \tag{6.79a}$$

$$y_c[n]=\mathrm{Re}\{y[n]\}=\mathrm{Re}\{H(\Omega)e^{j\Omega n}\} \tag{6.79b}$$

$$y_s[n]=\mathrm{Im}\{y[n]\}=\mathrm{Im}\{H(\Omega)e^{j\Omega n}\} \tag{6.79c}$$

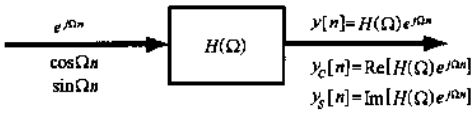


图 6-4　$\cos\Omega n$, $\sin\Omega n$ 和 $e^{j\Omega n}$的系统响应

当一个正弦序列 $\cos\Omega n$ 是由连续时间正弦 $\cos\omega t$ 信号样得到，样间隔为 T_s，即

$$\cos\Omega n=\cos\omega t\,|_{t=nT_s}=\cos\omega T_s n \tag{6.80}$$

如果用 Ω 替代 ωT_s，本节所有的结果都成立，即

$$\Omega=\omega T_s \tag{6.81}$$

对于一个连续时间正弦信号 $\cos\omega t$，当 ω 从 0 到∞变化时，每一个 ω 都有一个惟一的波形与之对应，增大 ω 将导致的正弦信号频率增加。而对于离散时间正弦信号 $\cos\Omega n$，当 Ω 从 0 到 2π 变化时才有惟一的波形与之对应，因为

$$\cos[(\Omega+2\pi m)n]=\cos(\Omega n+2\pi mn)=\cos\Omega n \qquad m\text{ 为整数} \tag{6.82}$$

下面的事实进一步限制了 Ω 的取值范围。

$$\cos(\pi\pm\Omega)n=\cos\pi n\cos\Omega n\mp\sin\pi n\sin\Omega n=(-1)^n\cos\Omega n \tag{6.83}$$

因此

$$\cos(\pi+\Omega)n=\cos(\pi-\Omega)n \tag{6.84}$$

等式(6.84)表示频率为$(\pi+\Omega)$的正弦信号和频率为$(\pi-\Omega)$的正弦信号有着相同的波形。因此，任一个 Ω 值为 0 到 π 外的正弦信号与 Ω 值在 0 到 π 范围内的正弦信号完全相同。由此得出结论，每个频率在 0 到 π 范围内的离散时间正弦信号都有一个不同的波形，因此只需观察系统频率在 0 到 π 范围内的频率响应即可。

B. 取样率

令 $\omega_M(=2\pi f_M)$为连续时间正弦信号的最高频率。那么由式(6.81)可以得到，离散时间正弦信号具有惟一波形的条件为

$$\omega_M T_s<\pi\rightarrow T_s<\frac{\pi}{\omega_M}\quad\text{或}\quad f_s>2f_M \tag{6.85}$$

其中 $f_s=1/T_s$ 为取样率(或频率)。式(6.85)指出由离散时间系统产生连续时间正弦信号，取样率不能少于正弦信号的两倍频率(Hz)。这结果是习题 5.59 中讨论的抽样理论的特殊情况。

6.7 模拟

考察一个输入为 $x(t)$、输出为 $y(t)$的连续时间 LTI 系统的目的，是希望能找到一个输入为 $x[n]$、输出为 $y[n]$的离散时间 LTI 系统，使得：

如果　　$x[n]=x(nT_s)$

则　　$y[n]=y(nT_s)$ (6.86)

其中 T_s 为抽样间隔。

设 $H_c(s)$与 $H_d(z)$分别为连续时间和离散时间系统的系统函数，如图 6-5 所示，并令

$$x(t)=e^{st}\qquad x[n]=x(nT_s)=e^{snT_s} \tag{6.87}$$

那么由式(3.1)和(4.1)得

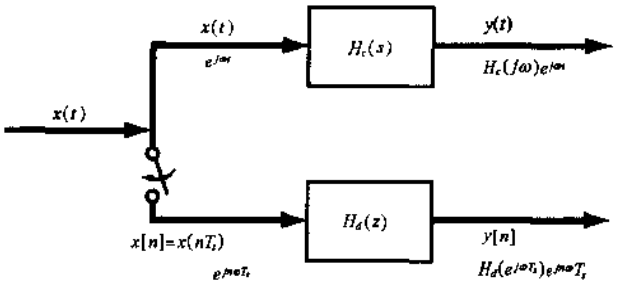


图 6-5　模拟系统的数字模拟

$$y(t) = H_c(j\omega)e^{j\omega t} \qquad y[n] = H_d(e^{j\omega T_s})e^{j\omega nT_s} \tag{6.88}$$

根据要求 $y[n]=y(nT_s)$ 可得出条件

$$H_c(j\omega)e^{j\omega nT_s} = H_d(e^{j\omega T_s})e^{j\omega nT_s}$$

由上式得

$$H_c(j\omega) = H_d(e^{j\omega T_s}) \tag{6.89}$$

式(6.89)也可表示为

$$H_c(\omega) = H_d(\Omega) \qquad \Omega = \omega T_s \tag{6.90}$$

注意离散时间系统的频率响应 $H_d(\Omega)$ 是 ω 的周期函数(周期为 $2\pi/T_s$),但连续时间系统的频率响应 $H_c(\omega)$ 不是周期的。因此,式(6.90)或(6.89)对每个 ω 不完全正确。如果输入 $x(t)$ 为带限的,那么理论上在频率范围 $(-\pi/T_s, \pi/T_s)$ 中的每个 ω 满足式(6.89)是可能的,如图 6-6 所示;然而,由式(5.85)和(6.77)我们看到,$H_c(\omega)$ 是 ω 的有理函数,$H_d(\Omega)$ 是 $e^{j\Omega}(\Omega=\omega T_s)$ 的有理函数,因此,式(6.89)是不可能满足的。我们可以通过其他的方法来确定离散时间系统,使得对于输入频带范围内的每个 ω,式(6.90)都达到合理的精度(习题 6.43 至 6.47)。

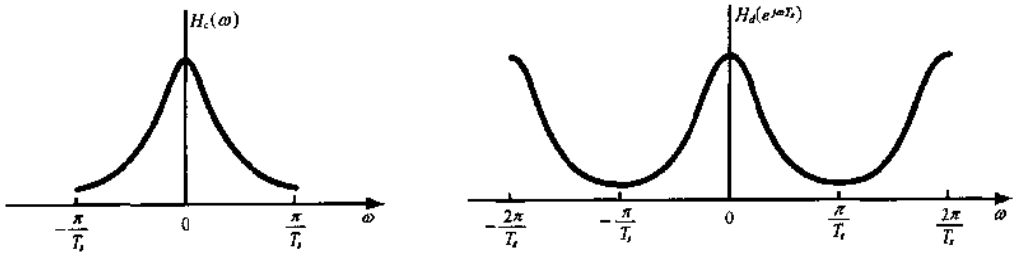


图 6-6

6.8　离散傅里叶变换

本节我们介绍有限长度序列的傅里叶变换,并称之为 DFT。注意,不要把 DFT 与傅里叶变换混淆。

A. 定义

令 $x[n]$ 为一个长度为 N 的有限长度序列,即

$$x[n] = 0 \qquad n \text{ 在 } 0 \leqslant n \leqslant N-1 \text{ 范围外} \tag{6.91}$$

用 $X[k]$ 表示 $x[n]$ 的 DFT,定义为

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn} \qquad k = 0, 1, \cdots, N-1 \tag{6.92}$$

其中 W_N 定义为

$$W_N = e^{-j(2\pi/N)} \tag{6.93}$$

逆 DFT(IDFT)的定义为

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X[k]W_N^{-kn} \qquad n = 0,1,\cdots,N-1 \tag{6.94}$$

而 DFT 对表示为

$$x[n] \leftrightarrow X[k] \tag{6.95}$$

DFT 具有以下主要特征：

1. $x[n]$与 $X[k]$一一对应。

2. 可用一个称为 FFT 的快速算法来加以计算。

3. 与离散傅里叶级数和傅里叶变换紧密相关。

4. 适合计算机实现傅里叶表示，这是因为它是离散的，而且在时间和频率上是有限长度。

注意式(6.92)中 N 的选择不是固定的。如果 $x[n]$的长度 $N_1 < N$，我们通过补$(N - N_1)$个 0 使其成为长度 N 的序列，所得的 $x[n]$称为 N 点序列，式(6.92)定义的 $X[k]$称为 N 点 DFT。合理地选择 N(如选它为 2 整数次幂)，可以提高计算效率。

B. DFT 与离散傅里叶级数的关系

把式(6.94)、(6.92)与式(6.7)和(6.8)作比较，可以发现有限序列 $x[n]$的 $X[k]$可以解释为“在离散傅里叶级数中的系数 c_k 与其周期 N_0 相乘”，$N_0 = N$，即

$$X[k] = Nc_k \tag{6.96}$$

实际上，如果把因子 $1/N$ 定义在 DFT 而不是 IDFT 中，则有 $X[k] = c_k$。

C. DFT 与傅里叶变换的关系

由式(6.91)定义的有限序列 $x[n]$的傅里叶变换可以表示为

$$X(\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\Omega n} \tag{6.97}$$

比较式(6.97)与(6.92)，可得

$$X[k] = X(\Omega)\big|_{\Omega = k2\pi/N} = X\left(\frac{k2\pi}{N}\right) \tag{6.98}$$

因此 $X[k]$表示 $X(\Omega)$在频率 $\Omega = k2\pi/N$(k 为整数)上的均匀抽样。

D. DFT 的性质

根据 DFT 与傅里叶变换的关系式(6.98)，可以得知它们的性质非常相似。但需注意，DFT $X[k]$是离散变量的函数，而 $X(\Omega)$为连续变量函数。注意，DFT 变量 n 和 k 必须限制在 $0 \leqslant n, k < N$ 的范围内，$x[n - n_0]$或 $X[k - k_0]$隐含了 $x[n - n_0]_{\text{mod}\,N}$或$X[k - k_0]_{\text{mod}\,N}$，其中模运算 $[m]_{\text{mod}\,N}$定义为

$$[m]_{\text{mod}\,N} = m + iN \tag{6.99}$$

存在一个整数 i 使得

$$0 \leqslant [m]_{\text{mod}\,N} < N \tag{6.100}$$

例如，如果 $x[n] = \delta[n - 3]$，则

$$x[n-4]_{\text{mod}\,6} = \delta[n-7]_{\text{mod}\,6} = \delta[n-7+6] = \delta[n-1]$$

DFT 位移也称为循环位移(circular shift)。DFT 的基本性质如下。

1. 线性特性

$$a_1x_1[n] + a_2x_2[n] \leftrightarrow a_1X_1[k] + a_2X_2[k] \tag{6.101}$$

2. 时移特性

$$x[n - n_0]_{\text{mod}\,N} \leftrightarrow W_N^{kn_0}X[k] \qquad W_N = e^{-j(2\pi/N)} \tag{6.102}$$

3. 频移特性

$$W_N^{-kn_0}x[n] \leftrightarrow X[k - k_0]_{\text{mod}\,N} \tag{6.103}$$

4. 共轭特性

$$x^*[n] \leftrightarrow X^*[-k]_{\text{mod}N} \tag{6.104}$$

其中 * 表示共轭复数。

5. 时间翻转

$$x[-n]_{\text{mod}N} \leftrightarrow X[-k]_{\text{mod}N} \tag{6.105}$$

6. 对偶性

$$X[n] \leftrightarrow Nx[-k]_{\text{mod}N} \tag{6.106}$$

7. 循环卷积

$$x_1[n] \otimes x_2[n] \leftrightarrow X_1[k]X_2[k] \tag{6.107}$$

其中

$$x_1[n] \otimes x_2[n] = \sum_{i=0}^{N-1} X_1[i]X_2[n-i]_{\text{mod}N} \tag{6.108}$$

式(6.108)中的卷积和称为 $x_1[n]$和 $x_2[n]$的循环卷积。

8. 乘积特性

$$x_1[n]x_2[n] \leftrightarrow \frac{1}{N}X_1[k] \otimes X_2[k] \tag{6.109}$$

其中

$$X_1[k] \otimes X_2[k] = \sum_{i=1}^{N-1} X_1[i]X_2[k-i]_{\text{mod}N}$$

9. 附加特性

当 $x[n]$为实数时,令

$$x[n] = x_e[n] + x_o[n]$$

其中 $x_e[n]$与 $x_o[n]$分别为 $x[n]$的偶对称和奇对称分量。再令

$$x[n] \leftrightarrow X[k] = A[k] + jB[k] = |X[k]| e^{j\theta[k]}$$

则

$$X[-k]_{\text{mod}N} = X^*[k] \tag{6.110}$$

$$x_e[n] \leftrightarrow \text{Re}\{X[k]\} = A[k] \tag{6.111a}$$

$$x_o[n] \leftrightarrow j\text{Im}\{X[k]\} = jB[k] \tag{6.111b}$$

由式(6.110)得

$$A[-k]_{\text{mod}N} = A[k] \qquad B[-k]_{\text{mod}N} = -B[k] \tag{6.112a}$$

$$|X[-k]|_{\text{mod}N} = |X[k]| \qquad \theta[-k]_{\text{mod}N} = -\theta[k] \tag{6.112b}$$

10. 帕斯瓦尔关系

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |X[k]|^2 \tag{6.113}$$

式(6.113)称为DFT的帕斯瓦尔恒等式(或帕斯瓦尔定理)。

习 题 解 答

离散傅里叶级数

6.1 如果两个信号 $\Psi_m[n]$和 $\Psi_k[n]$满足如下条件,我们称这组序列$\{\Psi_k[n]\}$为正交序列。

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} \Psi_m[n]\Psi_k^*[n] = \begin{cases} 0 & m \neq k \\ \alpha & m = k \end{cases} \tag{6.114}$$

其中 * 表示共轭复数,$\alpha \neq 0$。证明复指数序列

$$\Psi_k[n] = e^{jk(2\pi/N)n} \qquad k = 0, 1, \cdots, N-1 \tag{6.115}$$

在任意长度 N 区间内正交。

[redacted] 由式(1.90)我们注意到

$$\sum_{n=0}^{N-1}\alpha^n=\begin{cases}N & \alpha=1\\ \dfrac{1-\alpha^N}{1-\alpha} & \alpha\neq 1\end{cases}\tag{6.116}$$

把 $e^{jk(2\pi/N)}$ 代入式(6.116),可得

$$\sum_{n=0}^{N-1}e^{jk(2\pi/N)n}=\begin{cases}N & k=0,\pm N,\pm 2N,\cdots\\ \dfrac{1-e^{jk(2\pi/N)N}}{1-e^{jk(2\pi/N)}}=0 & \text{其他}\end{cases}\tag{6.117}$$

由于 $e^{jk(2\pi/N)N}=e^{jk2\pi}=1$,且在和式(6.117)中的每个复指数都是以 N 为周期的,因此在长度 N 区间内的任意值和式(6.117)仍然有效。即

$$\sum_{n=\langle N\rangle}e^{jk(2\pi/N)n}=\begin{cases}N & k=0,\pm N,\pm 2N,\cdots\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\tag{6.118}$$

现在用式(6.118),得

$$\sum_{n=\langle N\rangle}\Psi_m[n]\Psi_k^*[n]=\sum_{n=\langle N\rangle}e^{jm(2\pi/N)n}e^{-jk(2\pi/N)n}$$

$$=\sum_{n=\langle N\rangle}e^{j(m-k)(2\pi/N)n}=\begin{cases}N & m=k\\ 0 & m\neq k\end{cases}\tag{6.119}$$

其中 $m,k<N$。式(6.119)表示在长度 N 范围内的任意值 $\{e^{jk(2\pi/N)n}:k=0,1,\cdots,N-1\}$ 是正交的。式(6.114)是习题 5.1 中的式(5.95)离散对应。

6.2 用式(6.119)的正交条件,推导傅里叶系数的式(6.8)。

[redacted] 用 m 取代式(6.7)中求和变量 k,得

$$x[n]=\sum_{m=0}^{N-1}c_me^{jm(2\pi/N_0)n}\tag{6.120}$$

用式(6.115),令 $N=N_0$,式(6.120)可以重写为

$$x[n]=\sum_{m=0}^{N_0-1}c_m\Psi_m[n]\tag{6.121}$$

式(6.121)两边乘 $\Psi_k^*[n]$,对 n 从为 0 到(N_0-1)求和,我们得

$$\sum_{n=0}^{N_0-1}x[n]\Psi_k^*[n]=\sum_{n=0}^{N_0-1}\Big(\sum_{m=0}^{N_0-1}c_m\Psi_m[n]\Big)\Psi_k^*[n]$$

交换求和式的次序,由式(6.119),得

$$\sum_{n=0}^{N_0-1}x[n]\Psi_k^*[n]=\sum_{m=0}^{N_0-1}c_m\Big(\sum_{n=0}^{N_0-1}\Psi_m[n]\Psi_k^*[n]\Big)=N_0c_k\tag{6.122}$$

则

$$c_k=\frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1}x[n]\Psi_k^*[n]=\frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1}x[n]e^{-jk(2\pi/N_0)n}$$

6.3 确定图 6-7 周期序列 $x[n]$的傅里叶系数。

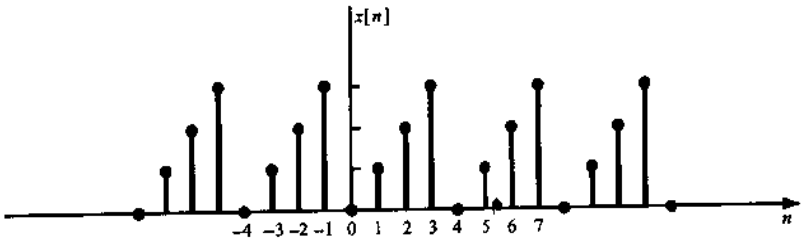


图 6-7

[redacted] 由图 6-7 可看出 $x[n]$是$\{0,1,2,3\}$的周期延拓,基本周期为 $N_0=4$。因此

$$\Omega_0=\frac{2\pi}{4}\qquad e^{-j\Omega_0}=e^{-j2\pi/4}=e^{-j\pi/2}=-j$$

根据式(6.8),离散时间傅里叶系数 c_k 为

$$c_0=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3}x[n]=\frac{1}{4}(0-1+2+3)=\frac{3}{2}$$

$$c_1 = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x[n](-j)^n = \frac{1}{4}(0 - j1 - 2 + j3) = -\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}$$

$$c_2 = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x[n](-j)^{2n} = \frac{1}{4}(0 - 1 + 2 - 3) = -\frac{1}{2}$$

$$c_3 = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x[n](-j)^{3n} = \frac{1}{4}(0 + j1 - 2 - j3) = -\frac{1}{2} - j\frac{1}{2}$$

注意，$c_3 = c_{4-1} = c_1^*$ [式(6.17)]。

6.4 考察图6-8(a)表示的周期序列 $x[n]$，确定傅里叶系数 c_k 并画出幅度谱 $|c_k|$。

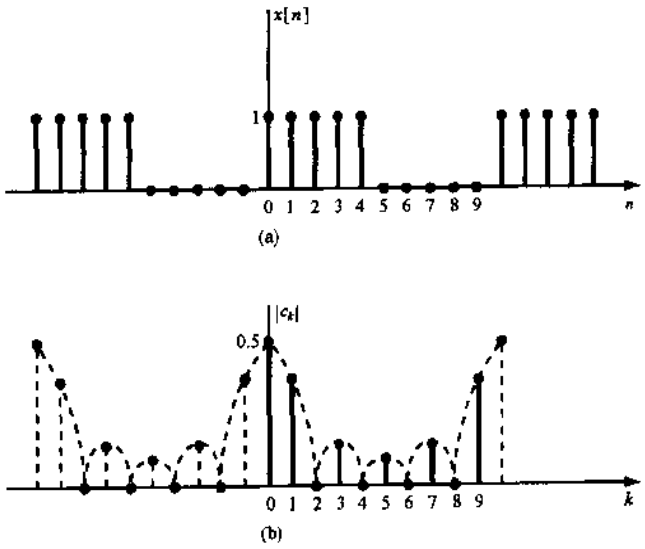


图 6-8

解 由图6-8(a)我们看到 $x[n]$ 的基本周期为 $N_0 = 10$ 及 $\Omega_0 = 2\pi/N_0 = \pi/5$。由式(6.8)和(1.90)，得

$$c_k = \frac{1}{10}\sum_{n=0}^{4} e^{-jk(\pi/5)n} = \frac{1}{10}\frac{1 - e^{-jk\pi}}{1 - e^{-jk(\pi/5)}}$$

$$= \frac{1}{10}\frac{e^{-jk\pi/2}\left(e^{jk\pi/2} - e^{-jk\pi/2}\right)}{e^{-jk\pi/10}\left(e^{jk\pi/10} - e^{-jk\pi/10}\right)}$$

$$= \frac{1}{10}e^{-jk(\pi/5)}\frac{\sin(k\pi/2)}{\sin(k\pi/10)} \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, 9$$

幅度谱 $|c_k|$ 由图6-8(b)画出。

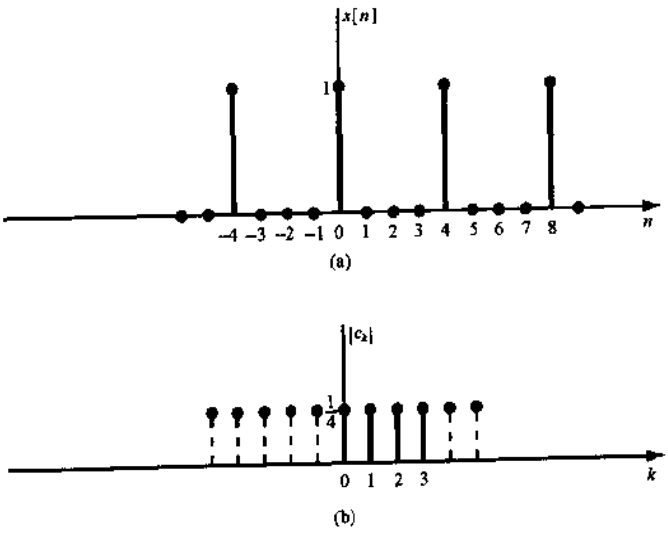


图 6-9

6.5 考察一个序列

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-4k]$$

(a) 画出 $x[n]$。

(b) 确定 $x[n]$的 Fourier 系数 c_k。

[redacted] (a)序列 $x[n]$由图 6-9(a)画出。可以看到 $x[n]$以序列{1,0,0,0}周期延拓,周期 $N_0=4$。

(b)由式(6.7)和(6.8)及图 6-9(a)得

$$x[n] = \sum_{k=0}^{3} c_k e^{jk(2\pi/4)n} = \sum_{k=0}^{3} c_k e^{jk(\pi/2)n}$$

$$c_k = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-jk(2\pi/4)n} = \frac{1}{4}x[0] = \frac{1}{4} \qquad \text{对所有 } k$$

这里 $x[1]=x[2]=x[3]=0$。由 6-9(b)画出了 $x[n]$的傅里叶系数。

6.6 确定下列各序列的离散傅里叶级数表示

(a)$x[n]=\cos\frac{\pi}{4}n$

(b)$x[n]=\cos\frac{\pi}{3}n+\sin\frac{\pi}{4}n$

(c)$x[n]=\cos^2\left(\frac{\pi}{8}n\right)$

[redacted] (a)$x[n]$的基本周期为 $N_0=8, \Omega_0=2\pi/N_0=\pi/4$。用式(6.8)来计算傅里叶系数 c_k,由欧拉公式得

$$\cos\frac{\pi}{4}n = \frac{1}{2}(e^{j(\pi/4)n}+e^{-j(\pi/4)n}) = \frac{1}{2}e^{j\Omega_0 n}+\frac{1}{2}e^{-j\Omega_0 n}$$

则 $x[n]$的傅里叶系数为 $c_1=1/2, c_{-1}=c_{-1+8}=c_7=1/2$,其余的 $c_k=0$。因此,$x[n]$的离散傅里叶级数为

$$x[n] = \cos\frac{\pi}{4}n = \frac{1}{2}e^{j\Omega_0 n}+\frac{1}{2}e^{j7\Omega_0 n} \qquad \Omega_0 = \frac{\pi}{4}$$

(b)由习题 1.16(i),$x[n]$的基本周期 $N_0=24, \Omega_0=2\pi/N_0=\pi/12$。再由欧拉公式得

$$x[n] = \frac{1}{2}(e^{j(\pi/3)n}+e^{-j(\pi/3)n}) + \frac{1}{2j}(e^{j(\pi/4)n}-e^{-j(\pi/4)n})$$

$$= \frac{1}{2}e^{-j4\Omega_0 n} + j\frac{1}{2}e^{-j3\Omega_0 n} - j\frac{1}{2}e^{j3\Omega_0 n} + \frac{1}{2}e^{j4\Omega_0 n}$$

则 $c_2=-j(1/2), c_4=1/2, c_{-4}=c_{-4+24}=c_{20}=1/2, c_{-3}=c_{-3+24}=c_{21}=j(1/2)$,其他的 $c_k=0$。因此 $x[n]$的离散傅里叶级数为

$$x[n] = -j\frac{1}{2}e^{j3\Omega_0 n}+\frac{1}{2}e^{j3\Omega_0 n}+\frac{1}{2}e^{j20\Omega_0 n}+\frac{1}{2}e^{j21\Omega_0 n} \qquad \Omega_0=\frac{\pi}{12}$$

(c)由习题 1.16(j)我们知道,$x[n]$的基本周期 $N_0=8, \Omega_0=2\pi/N_0=\pi/4$。再由欧拉公式得

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}e^{j(\pi/8)n}+\frac{1}{2}e^{-j(\pi/8)n}\right)^2 = \frac{1}{4}e^{j(\pi/4)n}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{-j(\pi/4)n}$$

$$= \frac{1}{4}e^{j\Omega_0 n}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{-j\Omega_0 n}$$

则 $c_0=1/2, c_1=1/4, c_{-1}=c_{-1+8}=c_7=1/4$,其他的 $c_k=0$。因此,$x[n]$的离散傅里叶级数为

$$x[n] = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{j\Omega_0 n}+\frac{1}{4}e^{j7\Omega_0 n} \qquad \Omega_0=\frac{\pi}{4}$$

6.7 设 $x[n]$为一基本周期为 N_0 的实周期序列,傅里叶系数为 $c_k=a_k+jb_k$,其中 a_k 和 b_k 都是实数。

(a)证明 $a_{-k}=a_k, b_{-k}=b_k$。

(b)证明如果 N_0 为偶数,$c_{N_0/2}$是实数。

(c)证明 $x[n]$也能用离散三角傅里叶级数表示。如果 N_0 是奇数,

$$x[n] = c_0 + 2\sum_{k=1}^{(N_0-1)/2}(a_k\cos k\Omega_0 n - b_k\sin k\Omega_0 n) \qquad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} \tag{6.123}$$

如果 N_0 为偶数，

$$x[n] = c_0 + (-1)^n c_{N_0/2} + 2\sum_{k=1}^{(N_0-1)/2}(a_k\cos k\Omega_0 n - b_k\sin k\Omega_0 n) \tag{6.124}$$

[redacted] (a)如果 $x[n]$为实数，那么由式(6.8)得

$$c_{-k} = \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1}x[n]e^{jk\Omega_0 n} = \left(\frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1}x[n]e^{-jk\Omega_0 n}\right)^* = c_k^*$$

则

$$c_{-k} = a_{-k} + jb_{-k} = (a_k + jb_k)^* = a_k - jb_k$$

其中

$$a_{-k} = a_k \qquad 及 \qquad b_{-k} = -b_k$$

(b)如果 N_0 是偶数，那么由式(6.8)得

$$\begin{aligned} c_{N_0/2} &= \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1}x[n]e^{-j(N_0/2)(2\pi/N_0)n} = \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1}x[n]e^{j\pi n} \\ &= \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1}(-1)^n x[n] = \text{实数} \end{aligned} \tag{6.125}$$

(c)重写式(6.7)为

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1}c_k e^{jk\Omega_0 n} = c_0 + \sum_{k=1}^{N_0-1}c_k e^{jk\Omega_0 n}$$

如果 N_0 是奇数，那么(N_0-1)是偶数，我们可以重写 $x[n]$为

$$x[n] = c_0 + \sum_{k=1}^{(N_0-1)/2}\left(c_k e^{jk\Omega_0 n} + c_{N_0-k}e^{jk(N_0-k)\Omega_0 n}\right)$$

根据式(6.17)

$$c_{N_0-k} = c_k^*$$

和

$$e^{j(N_0-k)\Omega_0 n} = e^{jN_0\Omega_0 n}e^{-jk\Omega_0 n} = e^{j2\pi n}e^{-jk\Omega_0 n} = e^{-jk\Omega_0 n}$$

则

$$\begin{aligned} x[n] &= c_0 + \sum_{k=1}^{(N_0-1)/2}(c_k e^{jk\Omega_0 n} + c_k^* e^{-jk\Omega_0 n}) = c_0 + \sum_{k=1}^{(N_0-1)/2}2\mathrm{Re}(c_k e^{jk\Omega_0 n}) \\ &= c_0 + 2\sum_{k=1}^{(N_0-1)/2}\mathrm{Re}(a_k + jb_k)(\cos k\Omega_0 n + j\sin k\Omega_0 n) \\ &= c_0 + 2\sum_{k=1}^{(N_0-1)/2}(a_k\cos k\Omega_0 n - b_k\sin k\Omega_0 n) \end{aligned}$$

如果 N_0 为偶数，我们可以把 $x[n]$写成

$$\begin{aligned} x[n] &= c_0 + \sum_{k=1}^{(N_0-1)/2}c_k e^{jk\Omega_0 n} \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{(N_0-1)/2}(c_k e^{jk\Omega_0 n} + c_{N_0-k}e^{-j(N_0-k)\Omega_0 n}) + c_{N_0/2}e^{j(N_0/2)\Omega_0 n} \end{aligned}$$

再由式(6.17)得

$$c_{N_0-k} = c_k^* \qquad e^{j(N_0-k)\Omega_0 n} = e^{-jk\Omega_0 n}$$

和

$$e^{j(N_0/2)\Omega_0 n} = e^{j(N_0/2)(2\pi/N_0)n} = e^{j\pi n} = (-1)^n$$

那么

$$\begin{aligned} x[n] &= c_0 + (-1)^n c_{N_0/2} + \sum_{k=1}^{(N_0-2)/2}2\mathrm{Re}(c_k e^{jk\Omega_0 n}) \\ &= c_0 + (-1)^n c_{N_0/2} + 2\sum_{k=1}^{(N_0-2)/2}(a_k\cos k\Omega_0 n - b_k\sin k\Omega_0 n) \end{aligned}$$

6.8 令 $x_1[n]$与 $x_2[n]$为基本周期为 N_0 的周期序列，它们的离散傅里叶级数为

$$x_1[n]=\sum_{k=0}^{N_0-1}d_k e^{jk\Omega_0 n}\qquad x_2[n]=\sum_{k=0}^{N_0-1}e_k e^{jk\Omega_0 n}\qquad \Omega_0=\frac{2\pi}{N_0}$$

证明序列 $x[n]=x_1[n]x_2[n]$为基本周期为 N_0 的周期序列，并可以表示为

$$x[n]=\sum_{n=0}^{N_0-1}c_k e^{jk\Omega_0 n}\qquad \Omega_0=\frac{2\pi}{N_0}$$

其中

$$c_k=\sum_{m=0}^{N_0-1}d_m e_{k\ m}\tag{6.126}$$

解 由于

$$x[n+N_0]=x_1[n+N_0]x_2[n+N_0]=x_1[n]x_2[n]=x[n]$$

则 $x[n]$是以 N_0 为基本周期的。令

$$x[n]=\sum_{k=0}^{N_0-1}c_k e^{jk\Omega_0 n}\qquad \Omega_0=\frac{2\pi}{N_0}$$

那么

$$\begin{aligned}c_k&=\frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1}x[n]e^{-jk\Omega_0 n}=\frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1}x_1[n]x_2[n]e^{-jk\Omega_0 n}\\&=\frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1}\Big(\sum_{m=0}^{N_0-1}d_m e^{jm\Omega_0 n}\Big)x_2[n]e^{-jk\Omega_0 n}\\&=\sum_{m=0}^{N_0-1}d_m\Big(\frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1}x_2[n]e^{-j(k-m)\Omega_0 n}\Big)=\sum_{m=0}^{N_0-1}d_m e_{k-m}\end{aligned}$$

因为

$$e_k=\frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1}x_2[n]e^{-jk\Omega_0 n}$$

所以括号内的项等于 e_{k-m}。

6.9 设 $x_1[n]$和 $x_2[n]$为习题 6.8 中的两个周期信号，证明

$$(1/N_0)\sum_{n=0}^{N_0-1}x_1[n]x_2[n]=\sum_{k=0}^{N_0-1}d_k e_{-k}\tag{6.127}$$

等式(6.127)称为周期序列的帕斯瓦尔定律。

解 由式(6.126)得

$$c_k=\frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1}x_1[n]x_2[n]e^{-jk\Omega_0 n}=\sum_{m=0}^{N_0-1}d_m e_{k-m}$$

设上述关系中的 $k=0$，则

$$\frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1}x_1[n]x_2[n]=\sum_{m=0}^{N_0-1}d_m e_{-m}=\sum_{k=0}^{N_0-1}d_k e_{-k}$$

6.10 (a)验证离散 Fouirer 级数的 Parseval 恒等式(式 6.19)，即

$$\frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1}|x[n]|^2=\sum_{k=0}^{N_0-1}|c_k|^2$$

(b)用习题 6.3 中的 $x[n]$验证 Parseval 恒等式(式 6.19)。

解 (a)令

$$x[n]=\sum_{k=0}^{N_0-1}c_k e^{jk\Omega_0 n}\qquad 及\qquad x^*[n]=\sum_{k=0}^{N_0-1}d_k e^{jk\Omega_0 n}$$

那么

$$d_k=\frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1}x^*[n]e^{-jk\Omega_0 n}=\Big(\frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1}x[n]e^{jk\Omega_0 n}\Big)^*=c_{-k}^*\tag{6.128}$$

式(6.128)说明如果 $x[n]$的傅里叶系数是 c_k，那么 $x^*[n]$的傅里叶系数是 c_{-k}^*。令式(6.127)中的

$x_1[n]=x[n], x_2[n]=x^*[n]$，则有 $d_k=c_k$ 及 $e_k=c_{-k}^*$（或 $e_{-k}=c_k^*$），因此可得

$$\frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1}x[n]x^*[n]=\sum_{k=0}^{N_0-1}c_kc_k^* \tag{6.129}$$

或

$$\frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1}x[n]^2=\sum_{k=0}^{N_0-1}|c_k|^2$$

(b)由图 6-7 和习题 6.3 的结果可得

$$\frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1}|x[n]|^2=\frac{1}{4}(0+1^2+2^2+3^2)=\frac{14}{4}=\frac{7}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{N_0-1}|c_k|^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right]$$

$$=\frac{14}{4}=\frac{7}{2}$$

由此即证 Parseval 恒等式。

傅里叶变换

6.11 确定 $x[n]=-a^nu[-n-1]$的傅里叶变换，其中 a 为实数。

解　由式(4.12)中 $x[n]$的 z 变换为

$$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}}\qquad |z|<|a|$$

那么，$|a|>1$ 时 $X(e^{j\Omega})$存在，因为 $X(z)$的收敛域包含单位圆，则

$$X(\Omega)=X(e^{j\Omega})=\frac{1}{1-ae^{-j\Omega}}\qquad |a|>1 \tag{6.130}$$

6.12 确定矩形脉冲序列的傅里叶变换(图 6-10)。

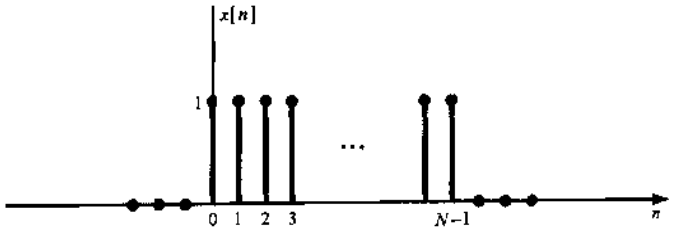


图 6-10

$$x[n]=u[n]-u[n-N]$$

解　由式(1.90)$x[n]$的 z 变换为

$$X(z)=\sum_{n=0}^{N-1}z^n=\frac{1-z^N}{1-z}\qquad |z|>0 \tag{6.131}$$

那么，$X(e^{j\Omega})$存在，因为 $X(z)$的收敛域包含单位圆。因此

$$\begin{aligned}X(\Omega)=X(e^{j\Omega})&=\frac{1-e^{-j\Omega N}}{1-e^{-j\Omega}}=\frac{e^{-j\Omega N/2}(e^{j\Omega N/2}-e^{-j\Omega N/2})}{e^{-j\Omega/2}(e^{j\Omega/2}-e^{-j\Omega/2})}\\&=e^{-j\Omega(N-1)/2}\frac{\sin(\Omega N/2)}{\sin(\Omega/2)}\end{aligned} \tag{6.132}$$

6.13 验证时移特性式(6.27)，即

$$x[n-n_0]\leftrightarrow e^{-j\Omega n_0}X(\Omega)$$

解　由定义式(6.27)

$$\mathcal{F}\{x[n-n_0]\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n-n_0]e^{-j\Omega n}$$

令 $m=n-n_0$，可得

$$\mathcal{F}\{x[n-n_0]\}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]e^{-j\Omega(m+n_0)}$$

$$=e^{-j\Omega n_0}\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]e^{-j\Omega m}=e^{-j\Omega n_0}X(\Omega)$$

因此　　$x[n-n_0]\leftrightarrow e^{-j\Omega n_0}X(\Omega)$

6.14　(a) 确定图 6-11(a)矩形脉冲序列的傅里叶变换 $X(\Omega)$。

(b) 画 $N_1=4$ 及 $N_1=8$ 的 $X(\Omega)$。

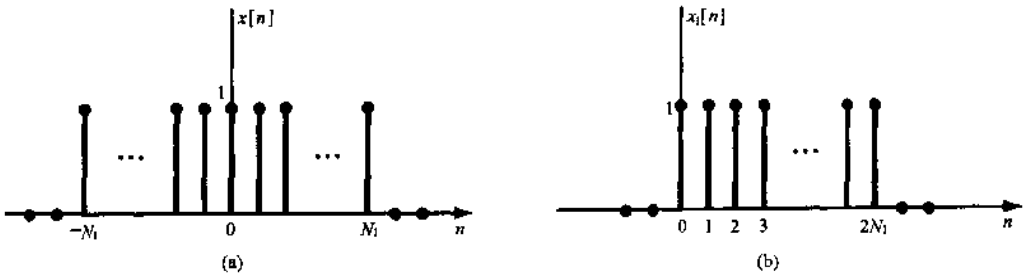


图 6-11

解　(a)由图 6.11 可看出

$$x[n]=x_1[n+N_1]$$

其中 $x_1[n]$如图 6-11(b)所示。令式(6.132)中的 $N=2N_1+1$,得

$$X_1(\Omega)=e^{-j\Omega N_1}\frac{\sin\left[\Omega\left(N_1+\frac{1}{2}\right)\right]}{\sin(\Omega/2)}$$

由时移特性式(6.43),得

$$X(\Omega)=e^{j\Omega N_1}X_1(\Omega)=\frac{\sin\left[\Omega\left(N_1+\frac{1}{2}\right)\right]}{\sin(\Omega/2)}\tag{6.133}$$

(b)令式(6.133)中的 $N_1=4$,得

$$X(\Omega)=\frac{\sin(4.5\Omega)}{\sin(0.5\Omega)}$$

波形如图 6-12(a)所示。类似地,令 $N_1=8$,得

$$X(\Omega)=\frac{\sin(8.5\Omega)}{\sin(0.5\Omega)}$$

其波形如图 6-12(b)所示。

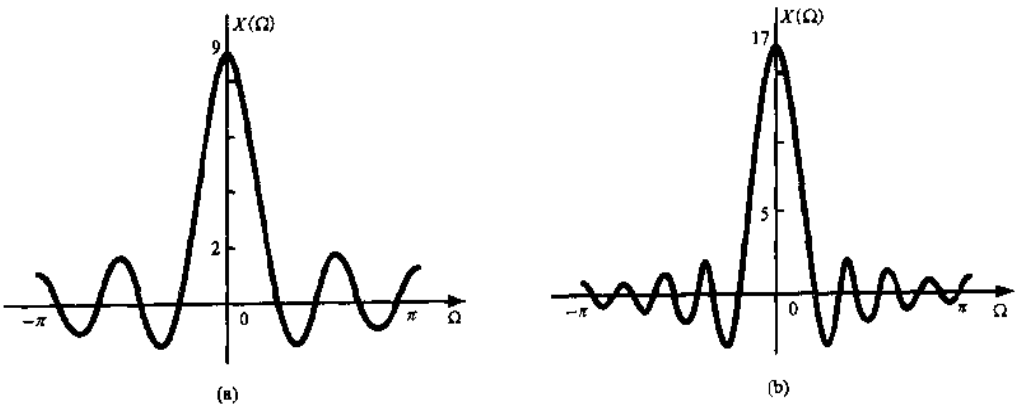


图 6-12

6.15　(a)确定矩形谱的傅里叶反变换 $x[n]$,$X(\Omega)$定义为

$$X(\Omega)=\begin{cases}1 & |\Omega|\leqslant W\\ 0 & W<|\Omega|\leqslant\pi\end{cases}$$

(b)画 $W=\pi/4$ 的 $x[n]$。

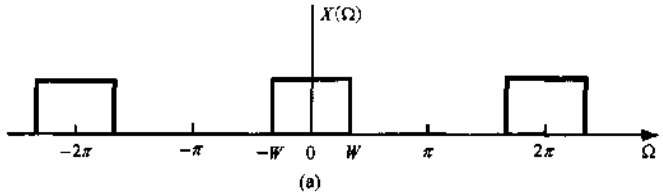
解　(a)由式(6.28)

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\Omega)e^{j\Omega n}\,d\Omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W}e^{j\Omega n}\,d\Omega=\frac{\sin Wn}{\pi n}$$

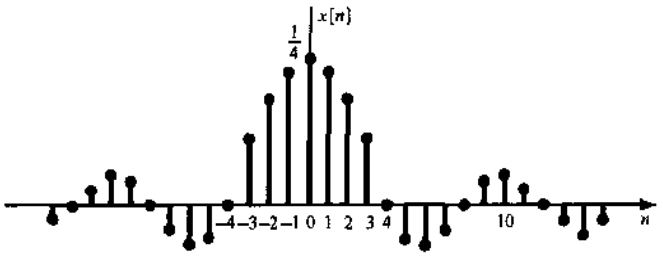
可得

$$\frac{\sin Wn}{\pi n} \leftrightarrow X(\Omega) = \begin{cases} 1 & |\Omega| \leqslant W \\ 0 & W < |\Omega| \leqslant \pi \end{cases} \tag{6.134}$$

(b) $W = \pi/4$ 时的序列 $x[n]$ 如图 6-13(b)所示。



(a)



(b)

图 6-13

6.16　验证频移特性式(6.44)，即

$$e^{j\Omega_0 n}x[n] \leftrightarrow X(\Omega - \Omega_0)$$

[redacted]　由式(6.27)得

$$\mathcal{F}\{e^{j\Omega_0 n}x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{j\Omega_0 n}x[n]e^{-j\Omega n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j(\Omega-\Omega_0)n} = X(\Omega - \Omega_0)$$

因此

$$e^{j\Omega_0 n}x[n] \leftrightarrow X(\Omega - \Omega_0)$$

6.17　确定

$$X(\Omega) = 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0) \qquad |\Omega|, |\Omega_0| \leqslant \pi$$

的傅里叶反变换 $x[n]$。

[redacted]　由式(6.28)和(1.22)得

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0)e^{j\Omega n}\,d\Omega = e^{j\Omega_0 n}$$

那么

$$e^{j\Omega_0 n} \leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega - \Omega_0) \qquad |\Omega|, |\Omega_0| \leqslant \pi \tag{6.135}$$

6.18　确定序列 $x[n]$ 的傅里叶变换

$$x[n] = 1 \qquad \text{对所有的 } n$$

[redacted]　设式(6.135)中的 $\Omega_0 = 0$，得

$$x[n] = 1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega) \qquad |\Omega| \leqslant \pi \tag{6.136}$$

图 6-14 画出了式(6.136)的波形。

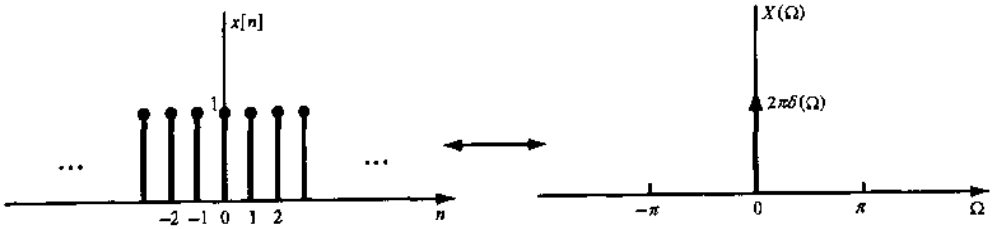


图 6-14　常数序列及其傅里叶变换

6.19 确定正弦序列的傅里叶变换

$$x[n] = \cos\Omega_0 n \qquad |\Omega_0| \leqslant \pi$$

解 由欧拉公式,得

$$\cos\Omega_0 n = \frac{1}{2}(e^{j\Omega_0 n} + e^{-j\Omega_0 n})$$

用式(6.135)和线性特性式(6.42),得

$$X(\Omega) = \pi[\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)] \qquad |\Omega|, |\Omega_0| \leqslant \pi$$

故

$$\cos\Omega_0 n \leftrightarrow \pi[\delta(\Omega - \Omega_0) + \delta(\Omega + \Omega_0)] \qquad |\Omega|, |\Omega_0| \leqslant \pi \tag{6.137}$$

图 6-15 说明了式(6.137)的变换对。

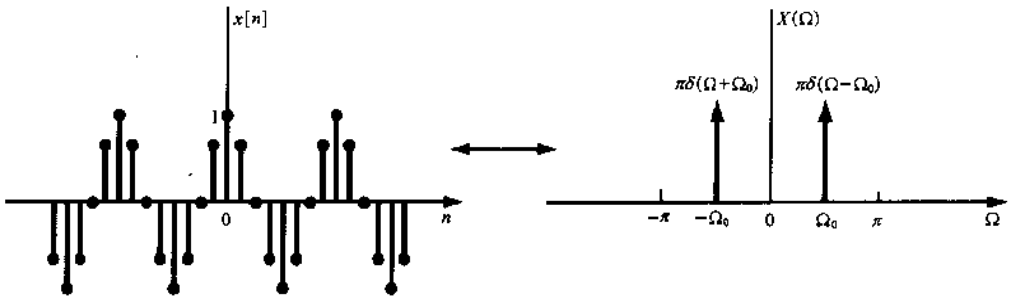


图 6-15　余弦序列及其傅里叶变换

6.20 验证共轭特性式(6.45),即

$$x^*[n] \leftrightarrow X^*(-\Omega)$$

解 由式(6.27)得

$$\mathscr{F}\{x^*[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n]e^{-j\Omega n} = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{j\Omega n}\right)^*$$

$$= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j(-\Omega)n}\right) = X^*(-\Omega)$$

因此

$$x^*[n] \leftrightarrow X^*(-\Omega)$$

6.21 证明时域尺度变换特性式(6.49),即

$$x_{(m)}[n] \leftrightarrow X(m\Omega)$$

解 由式(6.48)得

$$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[n/m] = x[k] & \text{如果 } n = km, k \text{ 为整数} \\ 0 & \text{如果 } n \neq km \end{cases}$$

由式(6.27)得

$$\mathscr{F}\{x_{(m)}[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{(m)}[n]e^{-j\Omega n}$$

将上式右边的求和变量改为 $n = km$,得

$$\mathscr{F}\{x_{(m)}[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{(m)}[km]e^{-j\Omega km} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]e^{-j(m\Omega)k} = X(m\Omega)$$

因此　$x_{(m)}[n] \leftrightarrow X(m\Omega)$

6.22 考察由下式定义的序列 $x[n]$

$$x[n] = \begin{cases} 1 & |n| \leqslant 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

(a) 画出 $x[n]$及它的傅里叶变换 $X(\Omega)$。

(b) 画出时域尺度变换序列 $x_{(2)}[n]$和它的傅里叶变换 $X_{(2)}(\Omega)$。

(c) 画出时域尺度变换序列 $x_{(3)}[n]$和它的傅里叶变换 $X_{(3)}(\Omega)$。

解 (a) 设式(6.133)中的 $N_1=2$,得

$$X(\Omega)=\frac{\sin(2.5\Omega)}{\sin(0.5\Omega)} \tag{6.138}$$

序列 $x[n]$和它的傅里叶变换 $X(\Omega)$如图 6-16(a)所示。

(b)由式(6.49)和(6.138)得

$$X_{(2)}(\Omega)=X(2\Omega)=\frac{\sin(5\Omega)}{\sin(\Omega)}$$

序列 $x_{(2)}[n]$和它的傅里叶变换 $X_{(2)}(\Omega)$如图 6-16(b)所示。

(c)用类似的方法,得

$$X_{(3)}(\Omega)=X(3\Omega)=\frac{\sin(7.5\Omega)}{\sin(1.5\Omega)}$$

序列 $x_{(3)}[n]$和它的傅里叶变换 $X_{(3)}(\Omega)$如图 6-16(c)所示。

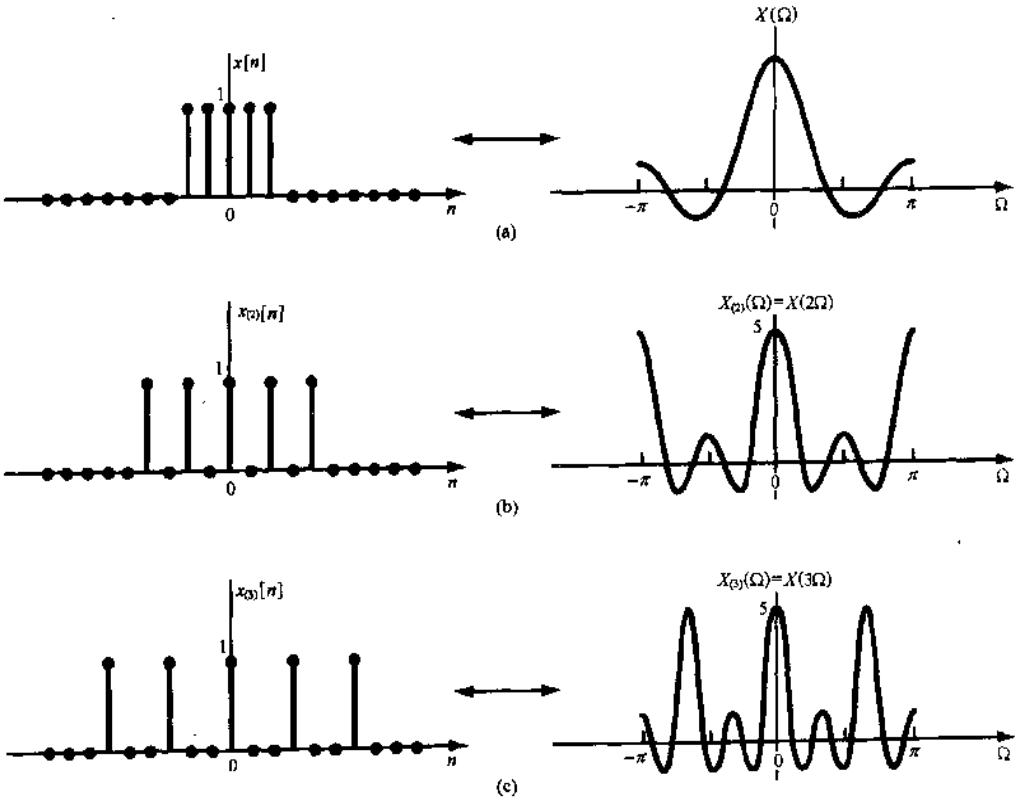


图 6-16

6.23 验证频率微分特性式(6.55),即

$$nx[n]\leftrightarrow j\frac{\mathrm{d}X(\Omega)}{\mathrm{d}\Omega}$$

解 由定义式(6.27)得

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\Omega n}$$

对上式两边取 Ω 的微分,并交换微分和求和次序得

$$\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}=\frac{d}{d\Omega}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\Omega n}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\frac{d}{d\Omega}(e^{-j\Omega n})$$

$$=-j\sum_{n=-\infty}^{\infty}nx[n]e^{-j\Omega n}$$

两边乘以 j,得

$$\mathcal{F}\{nx[n]\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}nx[n]e^{j\Omega n}=j\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$$

因此

$$nx[n]\leftrightarrow j\frac{dX(\Omega)}{d\Omega}$$

6.24 验证卷积定理式(6.58),即

$$x_1[n]*x_2[n]\leftrightarrow X_1(\Omega)X_2(\Omega)$$

[redacted] 由定义式(2.35)和(6.27),得

$$\mathscr{F}[x_1[n]*x_2[n]]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_1[k]x_2[n-k]\Big)e^{-j\Omega n}$$

改变求和顺序,得

$$\mathscr{F}[x_1[n]*x_2[n]]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_1[k]\Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_2[n-k]e^{-j\Omega n}\Big)$$

由时移特性式(6.43),得

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_2[n-k]e^{-j\Omega n}=e^{-j\Omega k}X_2(\Omega)$$

可得

$$\begin{aligned}\mathscr{F}[x_1[n]*x_2[n]]&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_1[k]e^{-j\Omega k}X_2(\Omega)\\&=\Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty}x_1[k]e^{-j\Omega k}\Big)X_2(\Omega)=X_1(\Omega)X_2(\Omega)\end{aligned}$$

因此

$$x_1[n]*x_2[n]\leftrightarrow X_1(\Omega)X_2(\Omega)$$

6.25 用卷积定理式(6.58)确定下式的傅里叶反变换 $x[n]$:

$$X(\Omega)=\frac{1}{(1-ae^{-j\Omega})^2}\qquad |a|<1$$

[redacted] 由式(6.37)得

$$a^nu[n]\leftrightarrow\frac{1}{1-ae^{-j\Omega}}\qquad |a|<1$$

因为

$$X(\Omega)=\frac{1}{(1-ae^{-j\Omega})^2}=\Big(\frac{1}{1-ae^{-j\Omega}}\Big)\Big(\frac{1}{1-ae^{-j\Omega}}\Big)$$

所以,由卷积定理式(6.58)得

$$x[n]=a^nu[n]*a^nu[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a^ku[k]a^{n-k}u[n-k]=a^n\sum_{k=0}^{n}1=(n+1)a^nu[n]$$

因此

$$(n+1)a^nu[n]\leftrightarrow\frac{1}{(1-ae^{-j\Omega})^2}\qquad |a|<1\tag{6.139}$$

6.26 验证乘积定理式(6.59),即

$$x_1[n]x_2[n]\leftrightarrow\frac{1}{2\pi}X_1(\Omega)\otimes X_2(\Omega)$$

[redacted] 令 $x[n]=x_1[n]x_2[n]$,由式(6.27)定义有

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_1[n]x_2[n]e^{-j\Omega n}$$

再由式(6.28)得

$$x_1[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X_1(\theta)e^{j\theta n}d\theta$$

则

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\Big[\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X_1(\theta)e^{j\theta n}d\theta\Big]x_2[n]e^{-j\Omega n}$$

交换求和与积分次序,得

$$\begin{aligned}X(\Omega)&=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X_1(\theta)\Big(\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_2[n]e^{-j(\Omega-\theta)n}\Big)d\theta\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X_1(\theta)X_2(\Omega-\theta)d\theta=\frac{1}{2\pi}X_1(\Omega)\otimes X_2(\Omega)\end{aligned}$$

因此

$$x_1[n]x_2[n]\leftrightarrow\frac{1}{2\pi}X_1(\Omega)\otimes X_2(\Omega)$$

6.27 验证式(6.62),(6.63)及(6.63b),即如果$x[n]$是实数且

$$x[n]=x_e[n]+x_o[n]\leftrightarrow X(\Omega)=A(\Omega)+jB(\Omega)\qquad(6.140)$$

其中$x_e[n]$和$x_o[n]$分别为$x[n]$的偶、奇分量,则

$$X(-\Omega)=X^*(\Omega)$$
$$x_e[n]\leftrightarrow\mathrm{Re}\{X(\Omega)\}=A(\Omega)$$
$$x_o[n]\leftrightarrow j\mathrm{Im}\{X(\Omega)\}=jB(\Omega)$$

[redacted] 如果$x[n]$是实数,那么$x^*[n]=x[n]$,由式(6.45)得

$$x^*[n]\leftrightarrow X^*(-\Omega)$$

由此可得

$$X(\Omega)=X^*(-\Omega)\qquad\text{或}\qquad X(-\Omega)=X^*(\Omega)$$

再由式(6.46)、(1.2)及(1.3),得

$$x[-n]=x_e[n]-x_o[n]\leftrightarrow X(-\Omega)=X^*(\Omega)=A(\Omega)-jB(\Omega)\qquad(6.141)$$

把式(6.141)加(减)(6.140),即得

$$x_e[n]\leftrightarrow A(\Omega)=\mathrm{Re}\{X(\Omega)\}$$
$$x_o[n]\leftrightarrow jB(\Omega)=j\mathrm{Im}\{X(\Omega)\}$$

6.28 证明

$$u[n]\leftrightarrow\pi\delta(\Omega)+\frac{1}{1-e^{-j\Omega}}\qquad|\Omega|\leqslant\pi\qquad(6.142)$$

[redacted] 令 $u[n]\leftrightarrow X(\Omega)$

因为

$$\delta[n]=u[n]-u[n-1]$$

对上式两边作傅里叶变换,由式(6.36)和(6.43),得

$$1=(1-e^{-j\Omega})X(\Omega)$$

注意,当$\Omega=0$时,$(1-e^{-j\Omega})=0$,$X(\Omega)$有如下形式:

$$X(\Omega)=A\delta(\Omega)+\frac{1}{1-e^{-j\Omega}}\qquad|\Omega|\leqslant\pi$$

其中A是常数,下面确定常数A。由式(1.5)得$u[n]$的偶对称分量

$$u_e[n]=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\delta[n]$$

$u[n]$的奇对称分量为

$$u_o[n]=u[n]-u_e[n]=u[n]-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\delta[n]$$

及

$$\mathcal{F}\{u_o[n]\}=A\delta(\Omega)+\frac{1}{1-e^{-j\Omega}}-\pi\delta(\Omega)-\frac{1}{2}$$

由于式(6.63b)奇实数序列的傅里叶变换必须是虚数,因此$A=\pi$,同时

$$u[n]\leftrightarrow\pi\delta(\Omega)+\frac{1}{1-e^{-j\Omega}}\qquad|\Omega|\leqslant\pi$$

6.29 验证累加特性式(6.57),即

$$\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]\leftrightarrow\pi X(0)\delta(\Omega)+\frac{1}{1-e^{-j\Omega}}X(\Omega)\qquad|\Omega|\leqslant\pi$$

[redacted] 由式(2.132)

$$\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]=x[n]*u[n]$$

再由卷积定理式(6.58),(6.142)及式(1.25):$X(\Omega)\delta(\Omega)=X(0)\delta(\Omega)$,可得

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \leftrightarrow X(\Omega)\left[\pi\delta(\Omega) + \frac{1}{1-e^{-j\Omega}}\right] \qquad |\Omega| \leqslant \pi$$

$$= \pi X(0)\delta(\Omega) + \frac{1}{1-e^{-j\Omega}}X(\Omega)$$

6.30 用累加定理式(6.57)和式(1.50),确定 $u[n]$的傅里叶变换。

解 由式(1.50)得

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$$

现在,由式(6.36)有

$$\delta[n] \leftrightarrow 1$$

设(6.57)中的 $x[k] = \delta[k]$,有

$$x[n] = \delta[n] \leftrightarrow X(\Omega) = 1 \qquad X(0) = 1$$

及

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] \leftrightarrow \pi\delta(\Omega) + \frac{1}{1-e^{-j\Omega}} \qquad |\Omega| \leqslant \pi$$

频率响应

6.31 一个因果离散时间 LTI 系统描述为

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] \tag{6.143}$$

其中 $x[n]$和 $y[n]$分别为系统的输入、输出。

(a)确定系统的频率响应 $H(\Omega)$。

(b)确定系统的脉冲响应 $h[n]$。

解 (a)对式(6.143)作傅里叶变换,得

$$Y(\Omega) - \frac{3}{4}e^{-j\Omega}Y(\Omega) + \frac{1}{8}e^{-j2\Omega}Y(\Omega) = X(\Omega)$$

或

$$\left(1 - \frac{3}{4}e^{-j\Omega} + \frac{1}{8}e^{-j2\Omega}\right)Y(\Omega) = X(\Omega)$$

那么

$$H(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\Omega} + \frac{1}{8}e^{-j2\Omega}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}\right)}$$

(b)用部分分式展开,得

$$H(\Omega) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}\right)} = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\Omega}}$$

对 $H(\Omega)$两边做傅里叶反变换得

$$h[n] = \left[2\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right]u[n]$$

这与习题4.32(b)的结果相同。

6.32 已知离散时间 LTI 系统描述为

$$y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = x[n] + \frac{1}{2}x[n-1] \tag{6.144}$$

(a) 确定系统的频率响应 $H(\Omega)$。

(b) 确定系统的脉冲响应 $h[n]$。

(c) 确定输入 $x[n] = \cos\frac{\pi}{2}n$ 时系统的响应 $y[n]$。

解 (a)对式(6.144)作傅里叶变换,得

$$Y(\Omega) - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}Y(\Omega) = X(\Omega) + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}X(\Omega)$$

那么

$$H(\Omega)=\frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}=\frac{1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

(b)
$$H(\Omega)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}+\frac{1}{2}\frac{e^{-j\Omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

对 $H(\Omega)$做傅里叶反变换,得

$$h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1]=\begin{cases}1 & n=0\\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} & n\geqslant 1\end{cases}$$

(c)由式(6.137)得

$$X(\Omega)=\pi\left[\delta\left(\Omega-\frac{\pi}{2}\right)+\delta\left(\Omega+\frac{\pi}{2}\right)\right]\qquad |\Omega|\leqslant\pi$$

那么

$$Y(\Omega)=X(\Omega)H(\Omega)=\pi\left[\delta\left(\Omega-\frac{\pi}{2}\right)+\delta\left(\Omega+\frac{\pi}{2}\right)\right]\frac{1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

$$=\pi\left(\frac{1+\frac{1}{2}e^{-j\pi/2}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\pi/2}}\right)\delta\left(\Omega-\frac{\pi}{2}\right)+\pi\left(\frac{1+\frac{1}{2}e^{-j\pi/2}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\pi/2}}\right)\delta\left(\Omega+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\pi\left(\frac{1-j\frac{1}{2}}{1+j\frac{1}{2}}\right)\delta\left(\Omega-\frac{\pi}{2}\right)+\pi\left(\frac{1+j\frac{1}{2}}{1-j\frac{1}{2}}\right)\delta\left(\Omega+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\pi\delta\left(\Omega-\frac{\pi}{2}\right)e^{-j2\tan^{-1}(1/2)}+\pi\delta\left(\Omega+\frac{\pi}{2}\right)e^{j2\tan^{-1}(1/2)}$$

对 $Y(\Omega)$做傅里叶反变换,由式(6.135),得

$$y[n]=\frac{1}{2}e^{j(\pi/2)n}e^{-j2\tan^{-1}(1/2)}+\frac{1}{2}e^{-j(\pi/2)n}e^{j2\tan^{-1}(1/2)}$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}n-2\tan^{-1}\frac{1}{2}\right)$$

6.33 已知一离散时间 LTI 系统的脉冲响应

$$h[n]=\frac{\sin(\pi n/4)}{\pi n}$$

如果输入 $x[n]$是基本周期为 $N_0=5$ 的周期序列(如图 6-17),确定输出 $y[n]$。

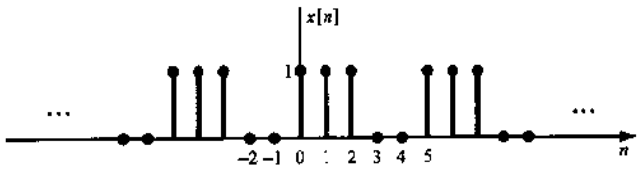


图 6-17

[redacted] 由式(6.134)得

$$H(\Omega)=\begin{cases}1 & |\Omega|\leqslant\pi/4\\ 0 & \pi/4<|\Omega|\leqslant\pi\end{cases}$$

因为 $\Omega_0=2\pi/N_0=2\pi/5$,且频率在范围 $|\Omega|\leqslant\pi/4$ 的信号才能通过系统,所以只有直流能通过。由图 6-17 和式(6.11)得

$$c_0=\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{4}x[n]=\frac{3}{5}$$

那么输出 $y[n]$为

$$y[n]=\frac{3}{5}\qquad \text{对所有 } n$$

6.34 考察图 6-18 表示的离散时间 LTI 系统。

(a) 确定系统的频率响应 $H(\Omega)$;

(b) 确定系统的脉冲响应 $h[n]$;

(c) 画出系统的幅度响应 $|H(\Omega)|$ 和相位响应 $\theta(\Omega)$;

(d) 确定系统 3-dB 带宽。

(a) 由图 6-18 得

$$y[n] = x[n] + x[n-1] \tag{6.145}$$

对式(6.145)做傅里叶变换,有

$$\begin{aligned} H(\Omega) &= \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = 1 + e^{-j\Omega} = e^{-j\Omega/2}(e^{j\Omega/2} + e^{-j\Omega/2}) \\ &= 2e^{-j\Omega/2}\cos\left(\frac{\Omega}{2}\right) \qquad |\Omega| \leqslant \pi \end{aligned} \tag{6.146}$$

(b)由 $h[n]$的定义[式(2.30)]和式(6.145)得

$$h[n] = \delta[n] + \delta[n+1]$$

或

$$h[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leqslant n \leqslant 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

(c) 由式(6.146)得

$$|H(\Omega)| = 2\cos\left(\frac{\Omega}{2}\right) \qquad |\Omega| \leqslant \pi$$

及

$$\theta(\Omega) = -\frac{\Omega}{2} \qquad |\Omega| \leqslant \pi$$

如图 6-19 所示。

(d) 令 Ω_{3dB}为系统的 3-dB 的带宽,那么由定义(5.7 节)

$$|H(\Omega_{3dB})| = \frac{1}{\sqrt{2}}|H(\Omega)|_{max}$$

得

$$\cos\left(\frac{\Omega_{3dB}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \Omega_{3dB} = \frac{\pi}{2}$$

可见此系统是有限脉冲响应(FIR)的宽带低通滤波器(见 2.9C)。

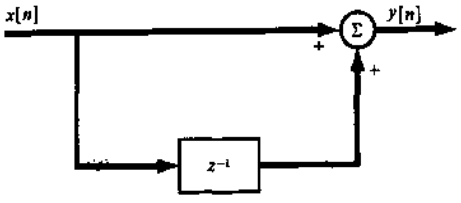


图 6-18

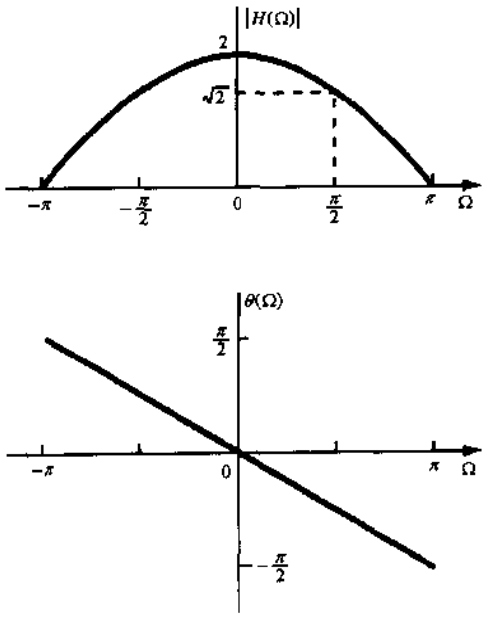


图 6-19

6.35 考察图 6-20 表示的离散时间 LTI 系统,其中 a 是 $0<a<1$ 的常量。

(a) 确定系统的频率响应 $H(\Omega)$;

(b) 确定系统的脉冲响应 $h[n]$;

(c) 画出系统在 $a=0.9$ 和 $a=0.5$ 的幅度响应 $|H(\Omega)|$。

(a) 由图 6-20 有

$$y[n]-ay[n-1]=x[n] \tag{6.147}$$

对式(7.147)作傅里叶变换,有

$$H(\Omega)=\frac{1}{1-ae^{-j\Omega}} \qquad |a|<1 \tag{6.148}$$

(b) 由式(6.37),可得

$$h[n]=a^nu[n]$$

(c) 由式(6.148)得

$$H(\Omega)=\frac{1}{1-ae^{-j\Omega}}=\frac{1}{1-a\cos\Omega+ja\sin\Omega}$$

及

$$|H(\Omega)|=\frac{1}{[(1-a\cos\Omega)^2+(a\sin\Omega)^2]^{1/2}}=\frac{1}{(1+a^2-2a\cos\Omega)^{1/2}} \tag{6.149}$$

$a=0.9$ 和 $a=0.5$ 的波形如图 6-21 所示。

可见,此系统是无限脉冲响应(IIR)低通滤波器(见 2.9C)。

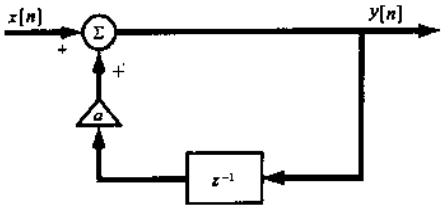


图 6-20

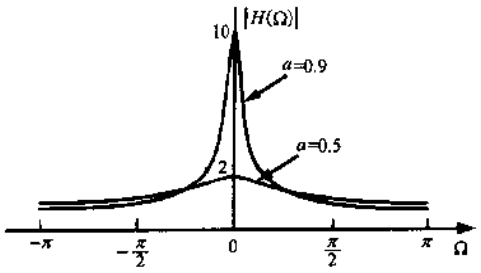


图 6-21

6.36 令 $h_{LPF}[n]$ 为离散时间低通滤波器的脉冲响应,频率响应为 $H_{LPF}(\Omega)$。证明

$$h[n]=(-1)^nh_{LPF}[n] \tag{6.150}$$

的系统是一个高通滤波器,它的频率响应为

$$H(\Omega)=H_{LPF}(\Omega-\pi) \tag{6.151}$$

由于 $-1=e^{j\pi}$,因此

$$h[n]=(-1)^nh_{LPF}[n]=e^{jn\pi}h_{LPF}[n] \tag{6.152}$$

对式(6.152)作傅里叶变换及用频移特性式(6.44),得

$$H(\Omega)=H_{LPF}(\Omega-\pi)$$

这是高通滤波器的频率响应,如图 6-22 所示。

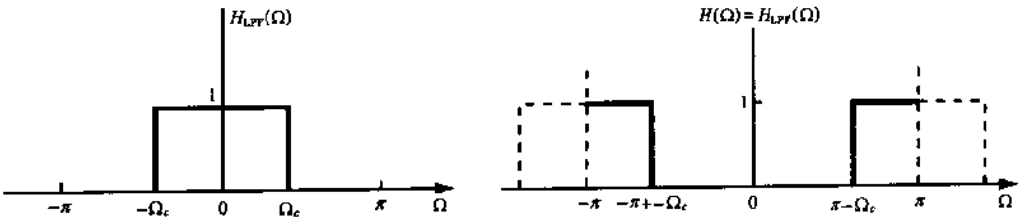


图 6-22　低通滤波器转换为高通滤波器

6.37 说明如果离散时间低通滤波器由差分方程描述:

$$y[n]=-\sum_{k=1}^{N}a_ky[n-k]+\sum_{k=0}^{N}b_kx[n-k] \tag{6.153}$$

那么离散时间滤波器

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N}(-1)^k a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{N}(-1)^k b_k x[n-k] \tag{6.154}$$

是一个高通滤波器。

对式(6.153)作傅里叶变换，我们得到低通滤波器的频率响应 $H_{LPF}(\Omega)$ 为

$$H_{LPF}(\Omega) = \frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk\Omega}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k e^{-jk\Omega}} \tag{6.155}$$

如果我们用$(\Omega-\pi)$代替式(6.155)中的 Ω，那么有

$$H_{HPF}(\Omega) = H_{LPF}(\Omega-\pi) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-jk(\Omega-\pi)}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k e^{-jk(\Omega-\pi)}} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k (-1)^k e^{-jk\Omega}}{1 + \sum_{k=1}^{N} (-1)^k a_k e^{-jk\Omega}} \tag{6.156}$$

它与如下差分方程一致：

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N}(-1)^k a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{N}(-1)^k b_k x[n-k]$$

6.38 将图 6-18(习题 6.34)的离散时间低通滤波器转换为高通滤波器。

图 6-18(习题 6.34)的离散时间低通滤波器的差分方程为

$$y[n] = x[n] + x[n-1]$$

由式(6.154)，转换的离通滤波器差分方程为

$$y[n] = x[n] - x[n-1] \tag{6.157}$$

由式(6.157)得出图 6-23。对式(6.157)作傅里叶变换及由式(6.77)，有

$$\begin{aligned} H(\Omega) &= 1 - e^{-j\Omega} = e^{-j\Omega/2}(e^{j\Omega/2} - e^{-j\Omega/2}) \\ &= j2e^{-j\Omega/2}\sin\frac{\Omega}{2} = 2e^{j(\pi-\Omega)/2}\sin\frac{\Omega}{2} \qquad |\Omega| \leqslant \pi \end{aligned} \tag{6.158}$$

由式(6.158)得

$$|H(\Omega)| = 2\left|\sin\frac{\Omega}{2}\right| \qquad |\Omega| \leqslant \pi$$

$$\theta(\Omega) = \begin{cases} (\pi-\Omega)/2 & 0 < \Omega < \pi \\ (-\pi-\Omega)/2 & -\pi \leqslant \Omega < 0 \end{cases}$$

如图 6-24 所示。可见此系统是离散时间高通 FIR 滤波器。

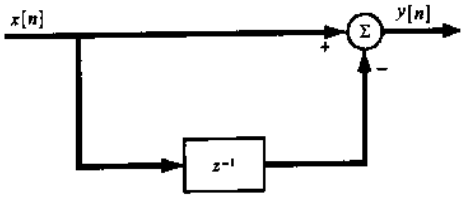


图 6-23

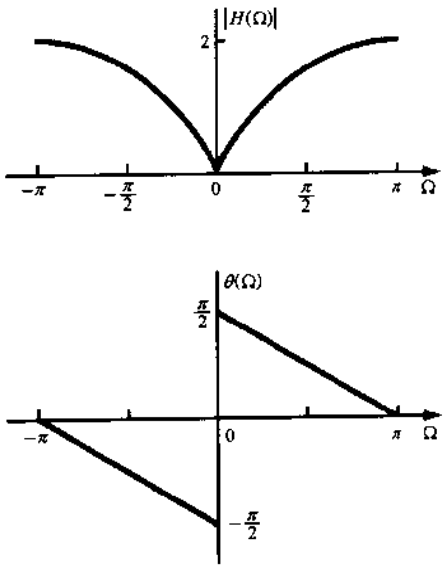


图 6-24

6.39 因果离散时间 LTI 系统的系统函数 $H(z)$给出为

$$H(z) = \frac{b + z^{-1}}{1 - az^{-1}} \tag{6.159}$$

其中 a 为实数且$|a|<1$。确定变量 b 使系统的频率响应$H(\Omega)$满足条件

$$|H(\Omega)| = 1 \qquad \text{对所有 } \Omega \tag{6.160}$$

这种系统称为全通滤波器。

解 由式(6.34),系统的频率响应为

$$H(\Omega) = H(z)|_{z=e^{j\Omega}} = \frac{b + e^{-j\Omega}}{1 - ae^{-j\Omega}} \tag{6.161}$$

那么由式(6.160)得

$$|H(\Omega)| = \left|\frac{b + e^{-j\Omega}}{1 - ae^{-j\Omega}}\right| = 1$$

由此推出

$$|b + e^{-j\Omega}| = |1 - ae^{-j\Omega}|$$

或

$$|b + \cos\Omega - j\sin\Omega| = |1 - a\cos\Omega + ja\sin\Omega|$$

或

$$1 + b^2 + 2b\cos\Omega = 1 + a^2 - 2a\cos\Omega \tag{6.162}$$

可见,当 $b = -a$ 时,式(6.162)对所有 Ω 成立,且满足式(6.160)。

6.40 令 $h[n]$为一 FIR 滤波器的脉冲响应,那么

$$h[n] = 0 \qquad n < 0, n \geqslant N$$

假设 $h[n]$是实数并令频率响应 $H(\Omega)$表示为

$$H(\Omega) = |H(\Omega)| e^{j\theta(\Omega)}$$

(a) 当 $h[n]$满足式(6.163)条件[图 6-25(a)]时,确定相位响应 $\theta(\Omega)$

$$h[n] = h[N - 1 - n] \tag{6.163}$$

(b) 当 $h[n]$满足式(6.164)条件[图 6-25(b)]时,确定相位响应 $\theta(\Omega)$

$$h[n] = -h[N - 1 - n] \tag{6.164}$$

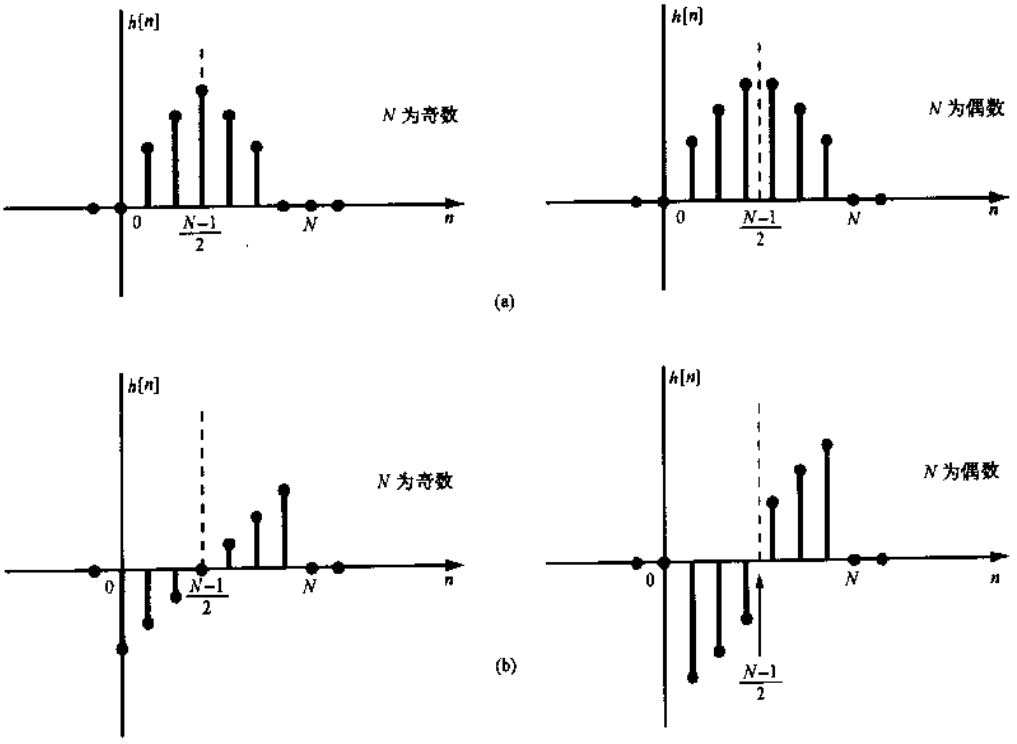


图 6-25

解 (a) 对式(6.163)作傅里叶变换,并用式(6.43),(6.46)及(6.62),得

$$H(\Omega) = H^*(\Omega)e^{-j(N-1)\Omega}$$

或

$$|H(\Omega)| e^{j\theta(\Omega)} = |H(\Omega)| e^{-j\theta(\Omega)} e^{-j(N-1)\Omega}$$

则

$$\theta(\Omega) = -\theta(\Omega) - (N-1)\Omega$$

$$\theta(\Omega) = -\frac{1}{2}(N-1)\Omega \tag{6.165}$$

因此相位响应是线性的。

(b)相似地,对式(6.164)作傅里叶变换,得

$$H(\Omega) = -H^*(\Omega)e^{-j(N-1)\Omega}$$

或

$$|H(\Omega)|e^{j\theta(\Omega)} = |H(\Omega)|e^{j\pi}e^{-j\theta(\Omega)}e^{-j(N-1)\Omega}$$

则

$$\theta(\Omega) = \pi - \theta(\Omega) - (N-1)\Omega$$

$$\theta(\Omega) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(N-1)\Omega \tag{6.166}$$

因此相位响应也是线性的。

6.41 考察三点移动平均离散时间滤波器,它的差分方程表示为

$$y[n] = \frac{1}{3}\{x[n] + x[n-1] + x[n-2]\} \tag{6.167}$$

(a) 确定并画出滤波器的脉冲响应 $h[n]$;

(b) 确定滤波器的频率响应 $H(\Omega)$;

(c) 画出滤波器的幅度响应 $|H(\Omega)|$ 及相位响应 $\theta(\Omega)$。

[redacted] (a) 由 $h[n]$的定义,有

$$h[n] = \frac{1}{3}\{\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-2]\} \tag{6.168}$$

或

$$h[n] = \begin{cases} \frac{1}{3} & 0 \leqslant n \leqslant 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

如图 6-26 所示。注意 $h[n]$满足式(6.163)的条件 $N=3$。

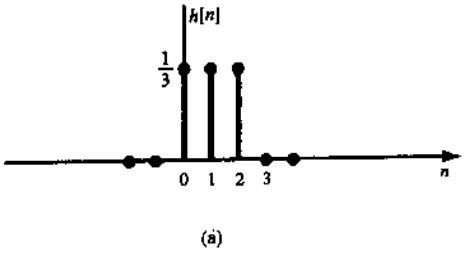
(b) 对式(6.168)作傅里叶变换,有

$$H(\Omega) = \frac{1}{3}\{1 + e^{-j\Omega} + e^{-2j\Omega}\}$$

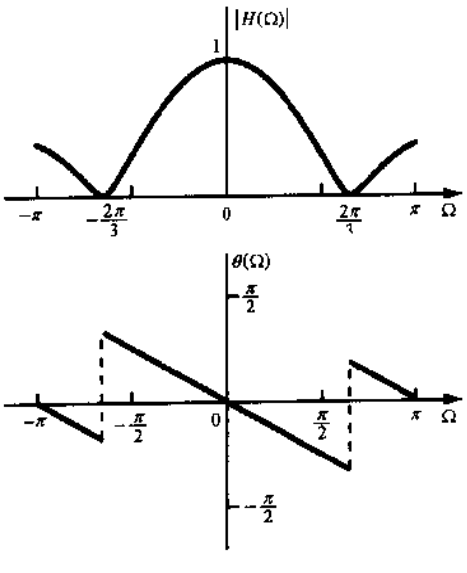
由式(1.90),$a = e^{-j\Omega}$,得

$$H(\Omega) = \frac{1}{3}\frac{1-e^{-j3\Omega}}{1-e^{-j\Omega}} = \frac{1}{3}\frac{e^{-j3\Omega/2}(e^{j3\Omega/2} - e^{-j3\Omega/2})}{e^{-j\Omega/2}(e^{j\Omega/2} - e^{-j\Omega/2})}$$

$$= \frac{1}{3}e^{-j\Omega}\frac{\sin(3\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)} = H_r(\Omega)e^{-j\Omega} \tag{6.169}$$



(a)



(b)

图 6-26

其中
$$H_r(\Omega) = \frac{1}{3}\frac{\sin(3\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)} \tag{6.170}$$

(c) 由式(6.169)得

$$|H(\Omega)| = |H_r(\Omega)| = \frac{1}{3}\left|\frac{\sin(3\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)}\right|$$

$$\theta(\Omega) = \begin{cases} -\Omega & H_r(\Omega) > 0 \\ -\Omega + \pi & H_r(\Omega) < 0 \end{cases}$$

频响曲线在图 6-26(b)中画出。可见此系统是线性相位低通 FIR 滤波器。

6.42 考察一个因果离散时间 FIR 滤波器，它的脉冲响应为

$$h[n] = \{2, 2, -2, -2\}$$

(a) 画出滤波器的脉冲响应 $h[n]$；

(b) 确定滤波器的频率响应 $H(\Omega)$；

(c) 画出系统的幅度响应 $|H(\Omega)|$ 和相位响应 $\theta(\Omega)$。

(a) 脉冲响应如图 6-27(a)所示，注意 $h[n]$ 满足式(6.164)的条件 $N=4$。

(b) 由定义式(6.27)得

$$\begin{aligned} H(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\Omega n} = 2 + 2e^{-j\Omega} - 2e^{-j2\Omega} - 2e^{-j3\Omega} \\ &= 2(1 - e^{-j3\Omega}) + 2(e^{-j\Omega} - e^{-j2\Omega}) \\ &= 2e^{-j3\Omega/2}(e^{j3\Omega/2} - e^{-j3\Omega/2}) + 2e^{-j3\Omega/2}(e^{j\Omega/2} - e^{-j\Omega/2}) \\ &= je^{-j3\Omega/2}\left(\sin\frac{\Omega}{2} + \sin\frac{3\Omega}{2}\right) \\ &= H_r(\Omega)e^{j[(\pi/2)-(3\Omega/2)]} \end{aligned} \tag{6.171}$$

其中
$$H_r(\Omega) = \sin\left(\frac{\Omega}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\Omega}{2}\right)$$

(c) 由式(6.171)得

$$|H(\Omega)| = |H_r(\Omega)| = \left|\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\Omega}{2}\right)\right|$$

$$\theta(\Omega) = \begin{cases} \pi/2 - \frac{3}{2}\Omega & H_r(\Omega) > 0 \\ \pi/2 - \frac{3}{2}\Omega & H_r(\Omega) < 0 \end{cases}$$

频响曲线由 6-27(b)画出。可见此系统是线性相位带通 FIR 滤波器。

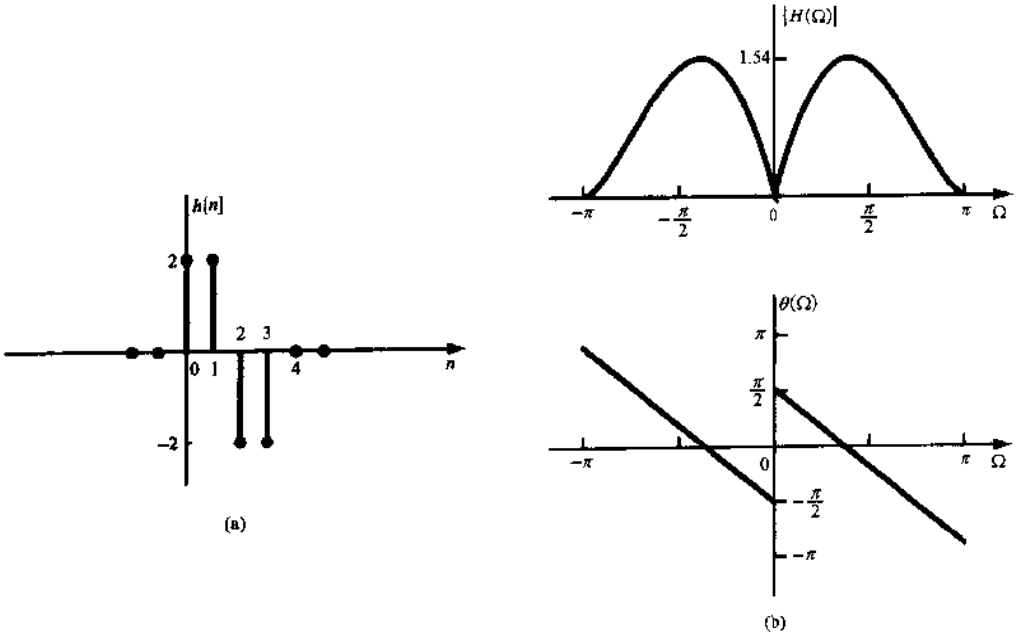


图 6-27

模拟

6.43　考察图 6-28 所示的 RC 低通滤波器，$RC=1$。

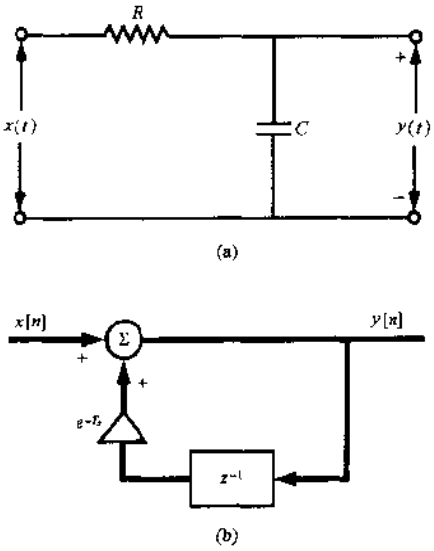


图 6-28　用冲激响应不变法模拟 RC 滤波器

(a) 构造一个离散时间滤波器使得

$$h_d[n] = h_c(t)\big|_{t=nT_s} = h_c(nT_s) \tag{6.172}$$

其中，$h_c(t)$是 RC 滤波器的冲激响应，$h_d[n]$是离散时间滤波器的脉波响应，T_s 是在设计过程中须确定的一个大于零的数。

(b) 画出 RC 滤波器的幅度响应$|H_c(\omega)|$及离散时间滤波器的幅度响应$|H_d(\omega T_s)|$，其中的 $T_s=1$ 及 $T_s=0.1$。

(a) RC 滤波器的系统函数$H_c(s)$为

$$H_c(s) = \frac{1}{s+1} \tag{6.173}$$

冲激响应 $h_c(t)$为

$$h_c(t) = e^{-t}u(t) \tag{6.174}$$

由式(6.172)，对应的 $h_d[n]$为

$$h_d[n] = e^{-nT_s}u[n] = (e^{-T_s})^n u[n] \tag{6.175}$$

对式(6.175)作 z 变换，离散时间滤波器的系统函数 $H_d(z)$为

$$H_d(z) = \frac{1}{1-e^{-T_s}z^{-1}}$$

由此我们得到了描述离散时间滤波器的差分方程为

$$y[n] - e^{-T_s}y[n-1] = x[n] \tag{6.176}$$

模拟 RC 滤波器的离散时间滤波器如图 6-28(b)所示。

(b) 由式(5.40)得

$$H_c(\omega) = H_c(s)\big|_{s=j\omega} = \frac{1}{j\omega+1}$$

那么

$$|H_c(\omega)| = \frac{1}{(1+\omega^2)^{1/2}}$$

由式(6.34)和(6.81)，有

$$H_d(\omega T_s) = H_d(z)\big|_{z=e^{j\omega T_s}} = \frac{1}{1-e^{-T_s}e^{-j\omega T_s}}$$

由式(6.149)，可得

$$|H_d(\omega T_s)| = \frac{1}{[1+e^{-2T_s}-2e^{-T_s}\cos(\omega T_s)]^{1/2}}$$

由 $T_s=1$，有

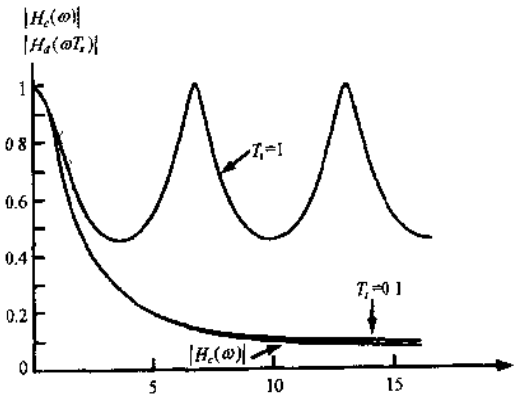


图 6-29

$$|H_d(\omega T_s)| = \frac{1}{[1 + e^{-2} - 2e^{-1}\cos(\omega)]^{1/2}}$$

由 $T_s = 0.1$，有

$$|H_d(\omega T_s)| = \frac{1}{[1 + e^{-0.2} - 2e^{-0.1}\cos(0.1\omega)]^{1/2}}$$

RC 滤波器的幅度响应 $|H_c(\omega)|$ 和离散时间滤波器在 $T_s = 1$ 和 $T_s = 0.1$ 时的幅度响应 $|H_d(\omega T_s)|$ 见图 6-29。注意图中幅度乘了一比例因子，使得在 $\omega = 0$ 时幅度为 1。

题中利用构造离散时间系统模拟连续时间系统方法称冲激响应不变法。

6.44 利用冲激响应不变法，确定模拟连续时间 LTI 系统的离散时间系统的频率响应 $H_d(\Omega)$。已知连续时间系统的系统函数为

$$H_c(s) = \frac{1}{(s + 1)(s + 2)}$$

解 用部分分式展开有

$$H_c(s) = \frac{1}{s + 1} - \frac{1}{s + 2}$$

那么，由表 3.1 连续时间系统的冲激响应为

$$h_c(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t) \tag{6.177}$$

令 $h_d[n]$ 为离散时间系统的冲激响应。那么由式(6.177)得

$$h_d[n] = h_c(nT_s) = (e^{-nT_s} - e^{-2nT_s})u[n]$$

离散时间系统的系统函数为

$$H_d(z) = \frac{1}{1 - e^{-nT_s}z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-2nT_s}z^{-1}} \tag{6.178}$$

离散时间系统的频率响应 $H_d(\Omega)$ 为

$$H_d(\Omega) = H_d(z)|_{z = e^{j\Omega}} = \frac{1}{1 - e^{-nT_s}e^{-j\Omega}} - \frac{1}{1 - e^{-2nT_s}e^{-j\Omega}} \tag{6.179}$$

注意，如果连续时间 LTI 系统的系统函数给出为

$$H_c(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s + a_k} \tag{6.180}$$

那么用冲激响应不变法设计的离散时间系统的，系统函数 $H_d(z)$ 为

$$H_d(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - e^{-a_k nT_s}z^{-1}} \tag{6.181}$$

6.45 连续时间 LTI 系统的微分器的系统函数为[式(3.20)]

$$H_c(s) = s \tag{6.182}$$

由

$$s = \frac{2}{T_s}\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \tag{6.183}$$

替换式(6.182)中 s 来设计离散时间 LTI 系统方法称为双线性变换法。T_s 是在设计过程中须确定的一个大于零的数。

(a) 画离散时间系统的框图。

(b) 确定离散时间系统的频率响应 $H_d(\Omega)$ 并画出它的幅度和相位响应。

解 (a) 令 $H_d(z)$ 为离散时间系统的系统函数。那么，由式(6.182)和(6.183)得

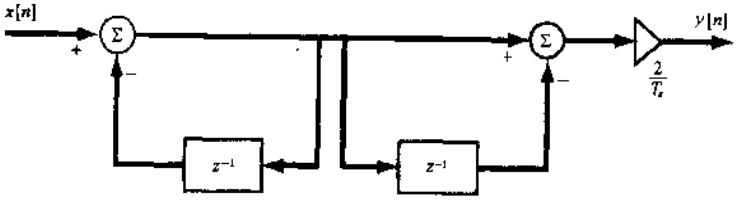
$$H_d(z) = \frac{2}{T_s}\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \tag{6.184}$$

记 $H_d(z)$ 为

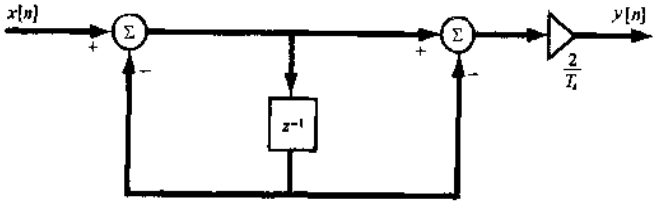
$$H_d(z) = \frac{2}{T_s}\left(\frac{1}{1 + z^{-1}}\right)(1 - z^{-1})$$

那么，由式(6.35)和(6.38)，此离散时间系统可以由两个系统级联来构造，如图 6-30(a)所示。可以看到，我们可以用一个单位延迟来代替两个延迟，如图 6-30(b)所示。

(b) 由式(6.184)，离散时间系统的频率响应 $H_d(\Omega)$ 为



(a)



(b)

图 6-30

$$H_d(\Omega)=\frac{2}{T_s}\frac{1-e^{-j\Omega}}{1+e^{-j\Omega}}=\frac{2}{T_s}\frac{e^{-j\Omega/2}(e^{j\Omega/2}-e^{-j\Omega/2})}{e^{j\Omega/2}(e^{j\Omega/2}+e^{-j\Omega/2})}$$

$$=j\frac{2}{T_s}\frac{\sin\Omega/2}{\cos\Omega/2}=j\frac{2}{T_s}\tan\frac{\Omega}{2}=\frac{2}{T_s}\tan\frac{\Omega}{2}e^{j\pi/2} \tag{6.185}$$

注意当 $\Omega\ll 1$ 时，有

$$H_d(\Omega)=j\frac{2}{T_s}\tan\frac{\Omega}{2}\approx j\frac{\Omega}{T_s}=j\omega \tag{6.186}$$

这里 $\Omega=\omega T_s$（图 6-31）

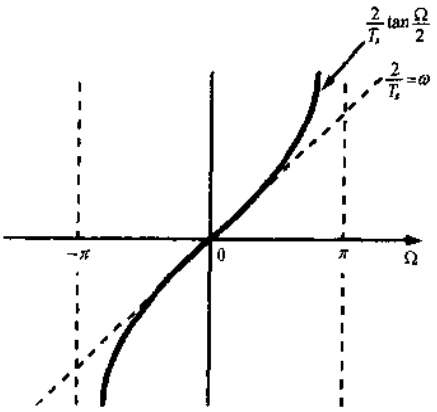


图 6-31

6.46　考虑用双线性变换设计离散时间 LTI 系统函数 $H_d(z)$。设连续时间 LTI 系统的系统函数 $H_c(s)$为有理多项式，对其作双线性变换，即

$$H_d(z)=H_c(s)\Big|_{s=\frac{2}{T_s}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \tag{6.187}$$

证明一稳定、因果连续时间系统总会得到一个稳定、因果离散时间系统。

[redacted]　考虑式(6.183)

$$s=\frac{2}{T_s}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \tag{6.188}$$

由上式得

$$z=\frac{1+(T_s/2)s}{1-(T_s/2)s} \tag{6.189}$$

令上式中 $s=j\omega$ 得

$$|z|=\left|\frac{1+j\omega(T_s/2)}{1-j\omega(T_s/2)}\right|=1 \tag{6.190}$$

这样我们看出 s 平面的 $j\omega$ 轴被转化成 z 平面的单位圆，令

$$z=re^{j\Omega},\quad s=\sigma+j\omega$$

由式(6.188)有

$$s=\frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1}=\frac{2}{T_s}\frac{re^{j\Omega}-1}{re^{j\Omega}+1}$$

$$=\frac{2}{T_s}\left(\frac{r^2-1}{1+r^2+2r\cos\Omega}+j\frac{2r\sin\Omega}{1+r^2+2r\cos\Omega}\right)$$

从而得

$$\sigma=\frac{2}{T_s}\frac{r^2-1}{1+r^2+2r\cos\Omega} \tag{6.191a}$$

$$\omega = \frac{2}{T_s}\frac{2r\sin\Omega}{1 + r^2 + 2r\cos\Omega} \tag{6.191b}$$

从式(6.191a)看出，如果 $r<1$，那么 $\sigma<0$，如果 $r>1$，那么 $\sigma>0$。因此，s 平面的左半平面映射到了 z 平面的单位圆内，s 平面的右半平面映射到了 z 平面的单位圆外(图 6-32)。从面我们推断：稳定、因果连续时间 LTI 系统经过双线性变换后得到的离散时间 LTI 系统仍然稳定、因果。当 $r=1$ 时，则 $\sigma=0$，且

$$\omega = \frac{2}{T_s}\frac{\sin\Omega}{1 + \cos\Omega} = \frac{2}{T_s}\tan\frac{\Omega}{2} \tag{6.192}$$

或

$$\Omega = 2\tan^{-1}\frac{\omega T_s}{2} \tag{6.193}$$

从式(6.193)可以看出，整个 $-\infty<\omega<+\infty$ 被映射到了 $-\pi\leqslant\Omega\leqslant\pi$。

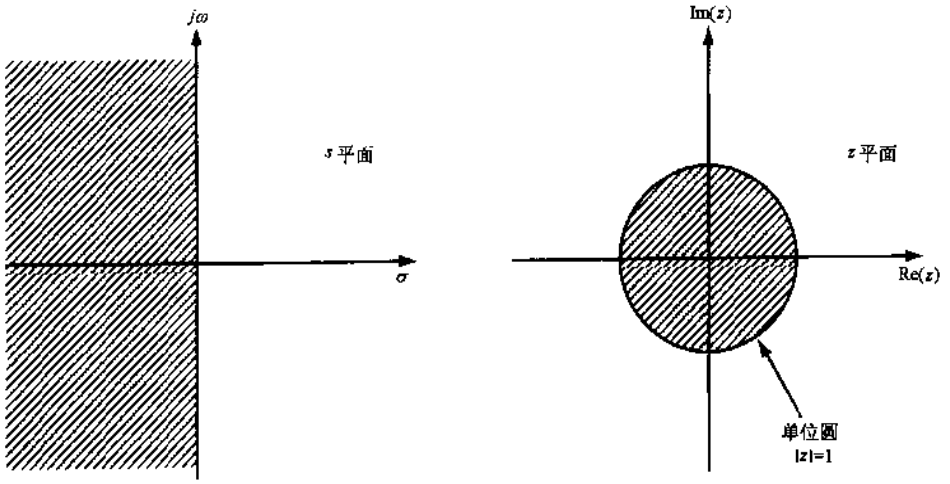


图 6-32　双线性变换

6.47　考虑如图 6-28(a)所示的 *RC* 低通滤波器，用双线性变化法设计一离散时间低通滤波器，使得 3-dB 带宽为 $\pi/4$。

[redacted]　由式(6.192)知，$\Omega_{3dB}=\pi/4$ 对应于

$$\omega_{3dB} = \frac{2}{T_s}\tan\frac{\Omega_{3dB}}{2} = \frac{2}{T_s}\tan\frac{\pi}{8} = \frac{0.828}{T_s} \tag{6.194}$$

由习题 5.55(a)，$\omega_{3dB}=1/RC$，*RC* 滤波器的系统函数为

$$H_c(s) = \frac{0.828/T_s}{s + 0.828/T_s} \tag{6.195}$$

设 $H_d(z)$ 为所求的离散时间滤波器，对式(6.195)进行双线性变换得

$$H_d(z) = \frac{0.828/T_s}{\frac{2}{T_s}\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} + \frac{0.828}{T_s}} = \frac{0.293(1 + z^{-1})}{1 - 0.414z^{-1}} \tag{6.196}$$

由此可得图 6-33 的系统。离散时间滤波器的频率响应为

$$H_d(\Omega) = \frac{0.293(1 + e^{-j\Omega})}{1 - 0.414e^{-j\Omega}} \tag{6.197}$$

当 $\Omega=0$ 时，$H_d(0)=1$，当 $\Omega=\pi/4$ 时，$|H_d(\pi/4)|=0.707=1/\sqrt{2}$，这就是所要求的响应。

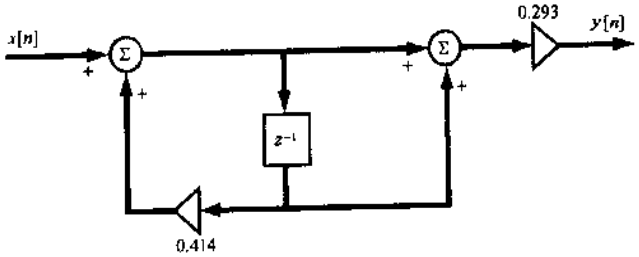


图 6-33　由双线性变换模拟 *RC* 滤波器

6.48 设 $h[n]$代表频率响应为 $H(\Omega)$的 IIR 滤波器的脉冲响应，$h_0[n]$为长度为 N 的 FIR 滤波器的脉冲响应，FIR 滤波器的频率响应为 $H_0(\Omega)$。证明当

$$h_0[n] = \begin{cases} h[n] & 0 \leqslant n \leqslant N-1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \tag{6.198}$$

均方误差

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |H(\Omega) - H_0(\Omega)|^2 d\Omega \tag{6.199}$$

最小。

[redacted] 由定义式(6.27)得

$$H(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\Omega n} \qquad H_0(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_0[n]e^{-j\Omega n}$$

设

$$E(\Omega) = H(\Omega) - H_0(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (h[n] - h_0[n])e^{-j\Omega n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n]e^{-j\Omega n} \tag{6.200}$$

其中 $e[n] = h[n] - h_0[n]$。根据帕斯瓦尔定理式(6.66)，有

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |E(\Omega)|^2 d\Omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |e[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n] - h_0[n]|^2$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} |h[n] - h_0[n]|^2 + \sum_{n=-\infty}^{-1} |h[n]|^2 + \sum_{n=N}^{\infty} |h[n]|^2 \tag{6.201}$$

上式中后两项是正常数，这样当

$$h[n] - h_0[n] = 0 \qquad 0 \leqslant n \leqslant N-1$$

时，ε^2 取得最小值，也即

$$h[n] = h_0[n] \qquad 0 \leqslant n \leqslant N-1$$

ε^2 取得最小值。

注意，式(6.198)可表示为

$$h_0[n] = h[n]w[n] \tag{6.202}$$

其中，$w[n]$是一个矩形窗函数：

$$w[n] = \begin{cases} 1 & 0 \leqslant n \leqslant N-1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \tag{6.203}$$

离散傅里叶变换

6.49 求出下列序列的 N 点 DFT：

(a) $x[n] = \delta[n]$

(b) $x[n] = u[n] - u[n-N]$

[redacted] (a)由式(6.92)和(1.45)，我们有

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n]W_N^{kn} = 1 \qquad k = 0, 1, \cdots, N-1$$

图 6-34 显示了 $x[n]$和它的 N 点 DFT $X[k]$。

(b) 由式(6.92)和(1.45)，利用式(1.90)，得

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{kn} = \frac{1 - W_N^{kN}}{1 + W_N^{k}} = 0 \qquad k \neq 0$$

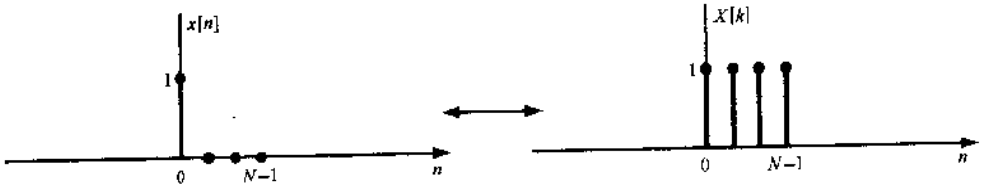


图 6-34

因为 $W_N^{kN}=e^{-j(2\pi/N)kN}=e^{-j2\pi}=1$,

$$X[0]=\sum_{n=0}^{N-1}W_N^0=\sum_{n=0}^{N-1}1=N$$

图 6-35 画出了 $x[n]$和它的 N 点 DFT $X[k]$。

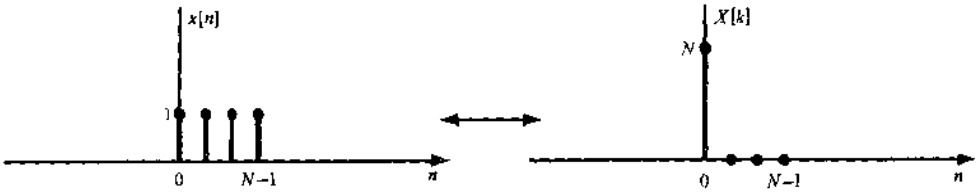


图 6-35

6.50 考虑长度为 4 的两序列 $x[n]$和 $h[n]$

$$x[n]=\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\qquad n=0,1,2,3$$

$$h[n]=0.5^n\qquad n=0,1,2,3$$

(a)用直接方法计算循环卷积 $y[n]=x[n]\otimes h[n]$。

(b)用 DFT 计算 $y[n]$。

(a)序列 $x[n]$和 $h[n]$可表示为

$$x[n]=\{1,0,-1,0\}\qquad y[n]=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8}\right\}$$

由式(6.108)得

$$y[n]=x[n]\otimes h[n]=\sum_{i=0}^{3}x[i]h[n-i]_{\text{mod }4}$$

图 6-36(a)中画出了 $n=0,1,2,3$ 时序列 $x[i]$和 $h[n-i]_{\text{mod }4}$的值。根据式(6.108)得

$$n=0\qquad y[0]=1(1)+(-1)\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}$$

$$n=1\qquad y[1]=1\left(\frac{1}{2}\right)+(-1)\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{3}{8}$$

$$n=2\qquad y[2]=1\left(\frac{1}{4}\right)+(-1)(1)=-\frac{3}{4}$$

$$n=3\qquad y[3]=1\left(\frac{1}{8}\right)+(-1)\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{8}$$

$$y[n]=\left\{\frac{3}{4},\frac{3}{8},-\frac{3}{4},-\frac{3}{8}\right\}$$

$y[n]$画在图 6-36(b)中。

(b) 由式(6.92)得

$$X[k]=\sum_{n=0}^{3}x[n]W_4^{kn}=1-W_4^{0k}\qquad k=0,1,2,3$$

$$H[k]=\sum_{n=0}^{3}h[n]W_4^{kn}=1+\frac{1}{2}W_4^k+\frac{1}{4}W_4^{2k}+\frac{1}{8}W_4^{3k}\qquad k=0,1,2,3$$

根据式(6.108), $y[n]$的 DFT 为

$$Y[k]=X[k]H[k]=(1-W_4^{2k})\left(1+\frac{1}{2}W_4^k+\frac{1}{4}W_4^{0k}+\frac{1}{8}W_4^{3k}\right)$$

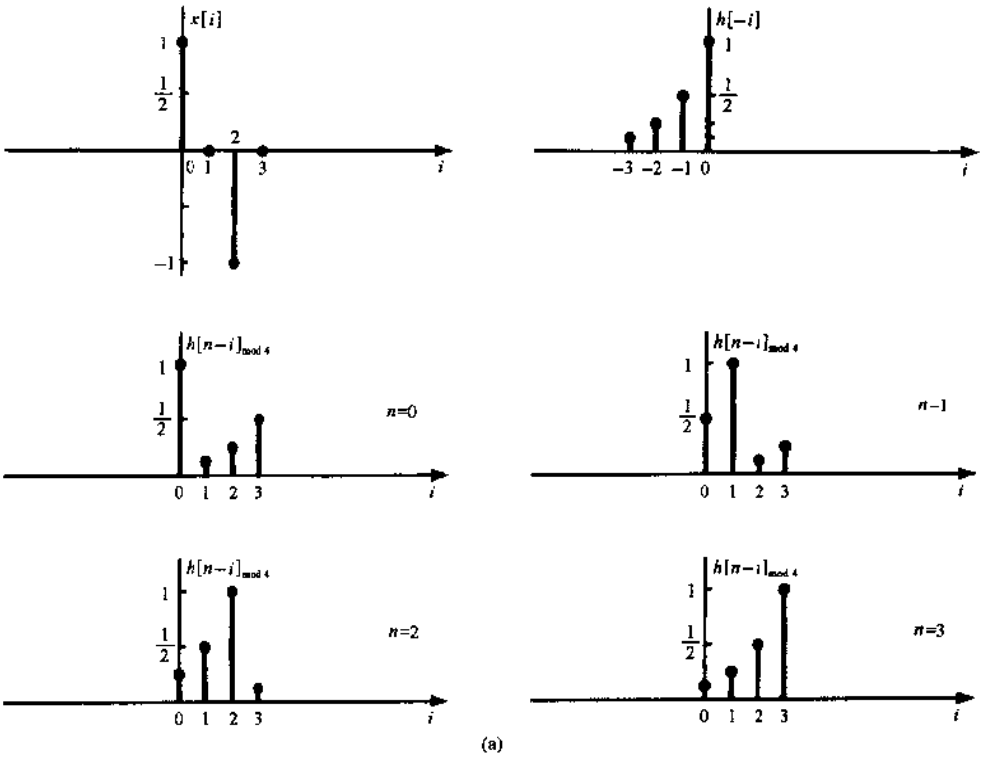
$$=1+\frac{1}{2}W_4^k-\frac{3}{4}W_4^{0k}-\frac{3}{8}W_4^{2k}-\frac{1}{4}W_4^{4k}-\frac{1}{8}W_4^{5k}$$

由于 $W_4^{4k}=(W_4^0)^k=1^k$, $W_4^{0k}=W_4^{(4+1)k}=W_4^k$, 可知

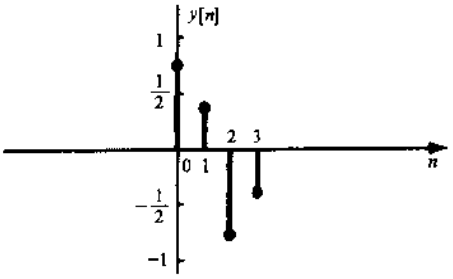
$$Y[k]=\frac{3}{4}+\frac{3}{8}W_4^k-\frac{3}{4}W_4^{0k}-\frac{3}{8}W_4^{0k}\qquad k=0,1,2,3$$

因此由定义我们得

$$y[n]=\left\{\frac{3}{4},\frac{3}{8},-\frac{3}{4},-\frac{3}{8}\right\}$$



(a)



(b)

图 6-36

6.51 考虑有限长复指数序列

$$x[n]=\begin{cases}e^{j\Omega_0 n} & 0\leqslant n\leqslant N-1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

(a) 求 $x[n]$的傅里叶变换 $X(\Omega)$。

(b) 求 $x[n]$的 N 点 DFT $X[k]$。

(a) 由式(6.27)和(1.90)得

$$X(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\Omega n}=\sum_{n=0}^{N-1}e^{-j\Omega_0 n}e^{-j\Omega n}=\sum_{n=0}^{N-1}e^{-j(\Omega_0-\Omega)n}$$

$$=\frac{1-e^{-j(\Omega-\Omega_0)N}}{1+e^{-j(\Omega-\Omega_0)}}=\frac{e^{-j(\Omega-\Omega_0)N/2}\left(e^{j(\Omega-\Omega_0)N/2}-e^{-j(\Omega-\Omega_0)N/2}\right)}{e^{-j(\Omega-\Omega_0)/2}\left(e^{-j(\Omega-\Omega_0)/2}-e^{-j(\Omega-\Omega_0)/2}\right)}$$

$$=e^{j(\Omega-\Omega_0)(N-1)/2}\frac{\sin[(\Omega-\Omega_0)N/2]}{\sin[(\Omega-\Omega_0)/2]}$$

(b) 由式(6.98)得

$$X[k]=X(\Omega)\mid_{\Omega=k2\pi/N}=X\left(\frac{k2\pi}{N}\right)$$

从而

$$X[k]=e^{j[(2\pi/N)k-\Omega_0](N-1)/2}\frac{\sin\left[\left(\frac{2\pi}{N}k-\Omega_0\right)\frac{N}{2}\right]}{\sin\left[\left(\frac{2\pi}{N}k-\Omega_0\right)\frac{1}{2}\right]}$$

6.52 证明如果 $X[n]$是实的,它的 DFT 满足关系式

$$X[N-k] = X^*[k] \tag{6.204}$$

其中 * 代表共轭。

解 由式(6.92)得

$$X[N-k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{(N-k)n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j(2\pi/N)(N-k)n}$$

现在

$$e^{-j(2\pi/N)(N-k)n} = e^{-j2\pi n}e^{j(2\pi/N)kn} = e^{j(2\pi/N)kn}$$

因此,如果 $x[n]$是实的,那么 $x^*[n]=x[n]$,

$$X[N-k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{j(2\pi/N)kn} = \left[\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j(2\pi/N)kn}\right]^* = X^*[k]$$

6.53 证明

$$x[n] = \mathrm{IDFT}\{X[k]\} = \frac{1}{N}[\mathrm{DFT}\{X^*[k]\}]^* \tag{6.205}$$

其中 * 代表复共扼,$X[k]=\mathrm{DFT}\{x[n]\}$。

解 我们可以把式(6.94)写作

$$x[n] = \frac{1}{N}\left[\sum_{n=0}^{N-1} X[k]e^{j(2\pi/N)kn}\right] = \frac{1}{N}\left[\sum_{n=0}^{N-1} X^*[k]e^{-j(2\pi/N)kn}\right]^*$$

注意最后一项括号里的一项是 $X^*[k]$的 DFT,因此

$$x[n] = \mathrm{IDFT}\{X[k]\} = \frac{1}{N}[\mathrm{DFT}\{X^*[k]\}]^*$$

以上说明计算 DFT 的运算法也可用来计算 IDFT。

6.54 式(6.92)中 DFT 的定义可用矩阵运算的形式表示:

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}_N\mathbf{x} \tag{6.206}$$

其中

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ \vdots \\ X[N-1] \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N & W_N^2 & \cdots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix} \tag{6.207}$$

$N\times N$ 矩阵 W_N 被称作 DFT 矩阵。注意 W_N 是对称矩阵,即是 $W_N^T = W_N$,这里 W_N^T 是 W_N 的转置矩阵。

(a) 证明

$$\mathbf{W}_N^{-1} = \frac{1}{N}\mathbf{W}_N^* \tag{6.208}$$

(b) 求出 $\mathbf{W}_4$ 和 $\mathbf{W}_4^{-1}$。

解 (a)假设 W_N 的逆存在,那么在式(6.206)两边同乘 $\mathbf{W}_N^{-1}$ 得

$$\mathbf{x} = \mathbf{W}_N^{-1}\mathbf{X} \tag{6.209}$$

这正是一种 IDFT 的表达式。式(6.94)给出的 IDFT 可表示为矩阵形式

$$\mathbf{x} = \frac{1}{N}\mathbf{W}_N^*\mathbf{X} \tag{6.210}$$

比较式(6.209)和(6.210)得

$$\mathbf{W}_N^{-1} = \frac{1}{N}\mathbf{W}_N^*$$

(b) 设 $\mathbf{W}_{n+1,k+1}$ 代表 $\mathbf{W}_4$ 中第 $n+1$ 行，第 $k+1$ 列，则由式(6.207)得

$$W_{n+1,k+1} = W_4^{nk} = e^{-j(2\pi/4)nk} = e^{-j(\pi/2)nk} = (-j)^{nk} \tag{6.211}$$

因此

$$\mathbf{W}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \qquad \mathbf{W}_4^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix} \tag{6.212}$$

6.55 (a) 求 $x[n]=\{0,1,2,3\}$ 的 DFT $X[k]$，

(b) 由(a)的结果求 IDFT $x[n]$。

(a)用式(6.206)和(6.212)，$x[n]$ 的 DFT $X[k]$ 为

$$\begin{bmatrix} X[0] \\ X[1] \\ X[2] \\ X[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -2+2j \\ -2 \\ -2-2j \end{bmatrix}$$

(b) 用式(6.209)和(6.212)得 $X[k]$ 的 IDFT 为

$$\begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ x[2] \\ x[3] \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ -2+2j \\ -2 \\ -2-2j \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 8 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

6.56 设 $x[n]$ 为一有限长序列，满足

$$x[n] = 0 \qquad n < 0, n \geqslant N \tag{6.213}$$

$x[n]$ 的 N 点 DFT $X[k]$ 由式(6.92)给出：

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn} \qquad W_N = e^{-j(2\pi/N)} \qquad k = 0,1,\cdots,N-1 \tag{6.214}$$

N 是偶数并令

$$f[n] = x[2n] \tag{6.215a}$$

$$g[n] = x[2n+1] \tag{6.215b}$$

序列 $f[n]$ 和 $g[n]$ 分别代表 $x[n]$ 的偶数抽取和奇数抽取。

(a) 证明

$$f[n] = g[n] = 0 \qquad \text{在 } 0 \leqslant n \leqslant \frac{N}{2} - 1 \text{ 外} \tag{6.216}$$

(b) 证明 $x[n]$ 的 N 点 DFT 可表示为

$$X[k] = F[k] + W_N^k G[k] \qquad k = 0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1 \tag{6.217a}$$

$$X\left[k+\frac{N}{2}\right] = F[k] - W_N^k G[k] \qquad k = 0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1 \tag{6.217b}$$

其中

$$F[k] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} f[n]W_{N/2}^{kn} \qquad k = 0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1 \tag{6.218a}$$

$$G[k] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} g[n]W_{N/2}^{kn} \qquad k = 0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1 \tag{6.218b}$$

(c) 画出流图说明从式(6.217a)和(6.217b)计算 $X[k]$ 的过程，其中 $N=8$。

(d) 假设 $x[n]$ 是复数且 W_N^k 已知，确定由式(6.214)计算 $X[n]$ 需要进行的复数乘法次数，确定由式(6.217)计算 $X[n]$ 需要进行的复数乘法次数，比较当 $N=2^{10}=1024$ 时两者的结果。

(a) 由式(6.213)得

$$f[n] = x[2n] = 0, n < 0 \qquad f\left[\frac{N}{2}\right] = x[N] = 0$$

这样

$$f[n]=0,\qquad n<0,n\geqslant\frac{N}{2}$$

类似地　　$g[n]=x[2n+1]=0,n<0\qquad g\left[\frac{N}{2}\right]=x[N+1]=0$

从而　　$$g[n]=0,n<0,n\geqslant\frac{N}{2}$$

(b) 重写式(6.214)为

$$\begin{aligned}X[k]&=\sum_{n\text{为偶数}}x[n]W_N^{kn}+\sum_{n\text{为奇数}}x[n]W_N^{kn}\\&=\sum_{m=0}^{(N/2)-1}x[2m]W_N^{2mk}+\sum_{m=0}^{(N/2)-1}x[2m+1]W_N^{(2m+1)k}\end{aligned}\tag{6.219}$$

但　　$$W_N^2=(e^{-j(2\pi/N)})^2=e^{-j(4\pi/N)}=e^{-j(2\pi/N/2)}=W_{N/2}\tag{6.220}$$

根据上式，式(6.219)可表示为

$$\begin{aligned}X[k]&=\sum_{m=0}^{(N/2)-1}f[m]W_{N/2}^{km}+W_N^k\sum_{m=0}^{(N/2)-1}g[m]W_{N/2}^{km}\\&=F[k]+W_N^kG[k]\qquad k=0,1,\cdots,N-1\end{aligned}\tag{6.221}$$

其中

$$F[k]=\sum_{n=0}^{(N/1)-1}f[n]W_{N/2}^{kn}\qquad k=0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1$$

$$G[k]=\sum_{n=0}^{(N/1)-1}g[n]W_{N/2}^{kn}\qquad k=0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1$$

注意，$F[k]$和$G[k]$分别是$f[n]$和$g[n]$的$N/2$点DFT，由于

$$W_N^{k+N/2}=W_N^kW_N^{N/2}=-W_N^k\tag{6.222}$$

因为　　$$W_N^{N/2}=(e^{-j(2\pi/N)})^{(N/2)}=e^{-j\pi}=-1\tag{6.223}$$

所以，式(6.221)可以表示为

$$X[k]=F[k]+W_N^kG[k]\qquad k=0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1$$

$$X[k+\frac{N}{2}]=F[k]-W_N^kG[k]\qquad k=0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1$$

(c) 流图说明了用(6.217a)和(6.217b)计算$X[k]$的步骤，如图6-37所示。

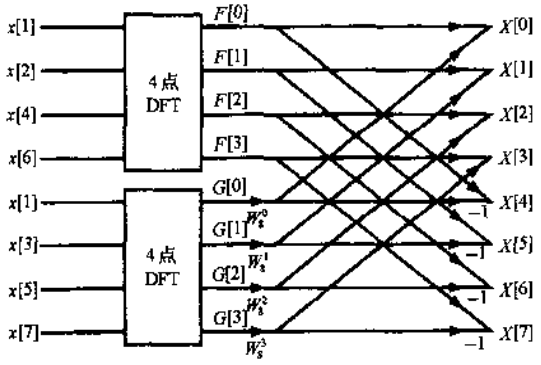


图6-37　8点时域抽取FFT算法流图

(d)由式(6.214)计算$X[k]$的一个点需要N次复数乘法，从而式(6.214)总的复数乘法次数为N^2，计算$F[k]$或$G[k]$的复数乘法次数为$\left(\frac{N}{2}\right)^2$，此外，计算$W_N^kG[k]$需要进行$N$次复数运算，因此用式(6.217a)和(6.217b)计算$X[k]$要进行的总的复数运算次数为$2\left(\frac{N}{2}\right)^2+N=\frac{N^2}{2}+N$。对$N=2^{10}=1024$，以式(6.214)为基础的算法需要$2^{20}\approx10^6$次复数乘法运算，而以式(6.217a)和(6.217b)为基础的算法需要$10^6/2+1024\approx10^6/2$。我们可看到次数大约减少一半。

以式(6.217a)和(6.217b)为基础计算$X[k]$的算法称作时域抽取快速傅里叶变换算法(FFT)。注意，由于$N/2$是偶数，用同样的过程，$F[k]$和$G[k]$可通过首先确定大约$N/4$点的DFT，再把它们结合

起来。

6.57 对序列 $x[n]=\{1,1,-1,-1,-1,1,1,-1\}$，利用时域抽取快速傅里叶算法计算其 DFT $X[k]$。

解 由图 6-38(a)和 6-38(b)易求得相位因子：

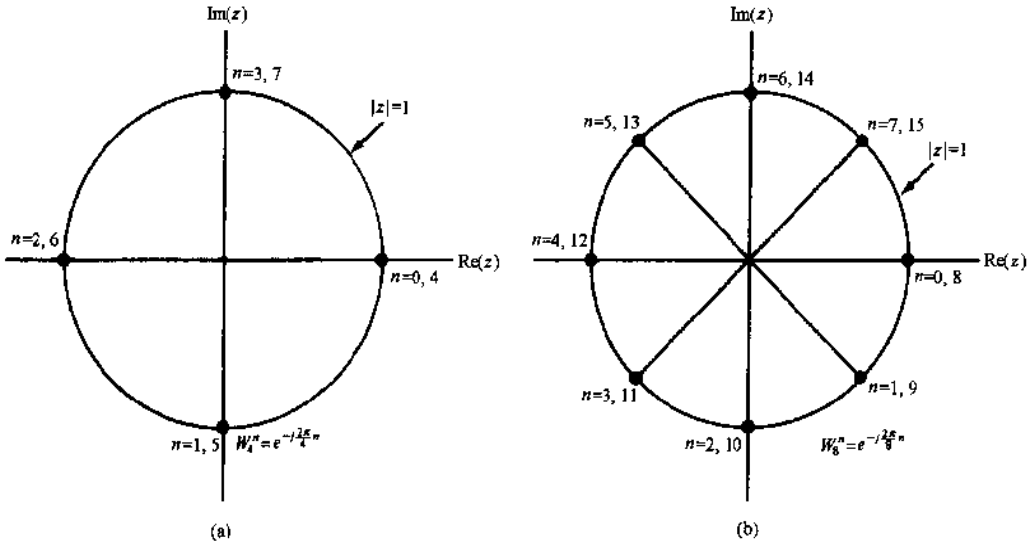


图 6-38　相位因子 W_4^n 和 W_8^n

$$W_4^0=1 \qquad W_4^1=-j \qquad W_4^2=-1 \qquad W_4^0=j$$

$$W_8^1=1 \qquad W_8^1=\frac{1}{\sqrt{2}}-j\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$W_8^0=-j \qquad W_8^0=-\frac{1}{\sqrt{2}}-j\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$W_8^4=-1 \qquad W_8^1=-\frac{1}{\sqrt{2}}+j\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$W_8^0=j \qquad W_8^1=\frac{1}{\sqrt{2}}+j\frac{1}{\sqrt{2}}$$

由式(6.215a)和(6.215b)得

$$f[n]=x[2n]=\{x[0],x[2],x[4],x[6]\}=\{1,-1,-1,1\}$$

$$g[n]=x[2n+1]=\{x[1],x[3],x[5],x[7]\}=\{1,-1,1,-1\}$$

然后由式(6.206)和(6.212)得

$$\begin{bmatrix}F[0]\\F[1]\\F[2]\\F[3]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-j&-1&j\\1&-1&1&-1\\1&j&-1&-j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\2+j2\\0\\2-j2\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}G[0]\\G[1]\\G[2]\\G[3]\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-j&-1&j\\1&-1&1&-1\\1&j&-1&-j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\4\\0\end{bmatrix}$$

由式(6.217a)和(6.217b)，得

$$X[0]=F[0]+W_8^0G[0]=0 \qquad X[4]=F[0]-W_8^1G[0]=0$$

$$X[1]=F[1]+W_8^1G[1]=2+j2 \qquad X[5]=F[1]-W_8^1G[1]=2+j2$$

$$X[2]=F[2]+W_8^0G[2]=-j4 \qquad X[6]=F[2]-W_8^2G[2]=j4$$

$$X[3]=F[3]+W_8^0G[3]=2-j2 \qquad X[7]=F[3]-W_8^3G[3]=2-j2$$

注意，因为 $x[n]$是实的，利用式(6.204)，则 $X[7],X[6],X[5]$可以很容易地通过对 $X[1],X[2],X[3]$求复共轭得出。

6.58 设 $x[n]$为一有限长序列,满足

$$x[n] = 0 \qquad n < 0, n \geqslant N$$

$x[n]$的 N 点 DFT $X[k]$由式(6.92)给出

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn} \qquad W_N = e^{-j(2\pi/N)} \qquad k = 0, 1, \cdots, N-1 \tag{6.224}$$

N 是偶数并令

$$p[n] = x[n] + x\left[n + \frac{N}{2}\right] \tag{6.225a}$$

$$q[n] = \left(x[n] - x\left[n + \frac{N}{2}\right]\right) W_N^n \tag{6.225b}$$

(a) 证明 $x[n]$的 N 点的 DFT 可表示为

$$X[2k] = P[k] \qquad k = 0, 1, \cdots, \frac{N}{2} - 1 \tag{6.226a}$$

$$X[2k+1] = Q[k] \qquad k = 0, 1, \cdots, \frac{N}{2} - 1 \tag{6.226b}$$

其中

$$P[k] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} p[n]W_{N/2}^{kn} \qquad k = 0, 1, \cdots, \frac{N}{2} - 1 \tag{6.227a}$$

$$Q[k] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} q[n]W_{N/2}^{kn} \qquad k = 0, 1, \cdots, \frac{N}{2} - 1 \tag{6.227b}$$

(b) 画出流图,说明从式(6.226a)和(6.217b)计算 $X[k]$的过程,其中 $N=8$。

[redacted] (a)重写式(6.224)得

$$X[k] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[n]W_N^{kn} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x[n]W_N^{kn} \tag{6.228}$$

改变上式中第二项变量 $n = m + N/2$ 得

$$X[k] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} x[n]W_N^{kn} + W_N^{(N/2)k} \sum_{m=0}^{(N/2)-1} x\left[m + \frac{N}{2}\right] W_N^{km} \tag{6.229}$$

由式(6.223)得

$$W_N^{(N/2)k} = (-1)^k$$

则式(6.229)可表示为

$$X[k] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \left\{x[n] + (-1)^k x\left[n + \frac{N}{2}\right]\right\} W_N^{kn} \tag{6.230}$$

因为 k 为偶数,令上式中 $k=2r$ 得

$$X[2r] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} p[n]W_N^{2rn} = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} p[n]W_{N/2}^{rn} \qquad r = 0, 1, \cdots, \frac{N}{2} - 1 \tag{6.231}$$

这里用了式(6.220)。相似地,当 k 为奇数时,令式(6.230)中 $k=2r+1$,则

$$X[2r+1] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} q[n]W_N^{2rn} = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} q[n]W_{N/2}^{rn} \qquad r = 0, 1, \cdots, \frac{N}{2} - 1 \tag{6.232}$$

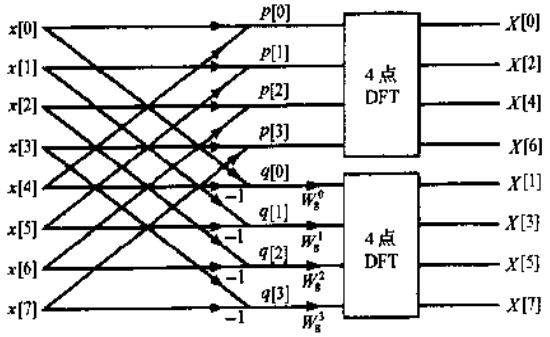


图 6-39　8 点频域抽取 FFT 算法流图

式(6.231)和(6.232)分别代表了 $p[n]$和 $q[n]$的 $N/2$ 点的 DFT。式(6.231)和(6.232)重写为

$$X[2k] = P[k] \qquad k = 0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1$$

$$X[2k+1] = Q[k] \qquad k = 0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1$$

其中

$$P[k] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} p[n]W_{N/2}^{kn} \qquad k = 0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1$$

$$Q[k] = \sum_{n=0}^{(N/2)-1} q[n]W_{N/2}^{kn} \qquad k = 0,1,\cdots,\frac{N}{2}-1$$

(b)流图给出了用(6.227a)和(6.227b)计算 $X[k]$的步骤,如图 6-39 所示。用式(6.227a)和(6.227b)计算 $X[k]$的方法称为频域抽取快速傅里叶变换(FFT)。

6.59 用频域抽取 FFT 算法重做题 6.57。

解 题 6.57 有

$$x[n] = \{1,1,-1,-1,-1,1,1,-1\}$$

由式(6.225a)和(6.225b)并利用题 6.57 中得出的 W_8^n,我们得

$$\begin{aligned} p[n] &= x[n] + x\left[n+\frac{N}{2}\right] \\ &= \{(1-1),(1+1),(-1+1),(-1-1)\} = \{0,2,0,-2\} \\ q[n] &= \left(x[n] - x\left[n+\frac{N}{2}\right]\right)W_8^n \\ &= \{(1+1)W_8^0,(1-1)W_8^1,(-1-1)W_8^2,(1+1)W_8^3\} \\ &= \{2,0,j2,0\} \end{aligned}$$

从而根据式(6.206)和(6.212)得

$$\begin{bmatrix} P[0] \\ P[1] \\ P[2] \\ P[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -j4 \\ 0 \\ j4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Q[0] \\ Q[1] \\ Q[2] \\ Q[3] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ j2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+j2 \\ 2-j2 \\ 2+j2 \\ 2-j2 \end{bmatrix}$$

由式(6.226a)和(6.226b)得

$$\begin{aligned} X[0] &= P[0] = 0 & X[4] &= P[2] = 0 \\ X[1] &= Q[0] = 2+j2 & X[5] &= Q[2] = 2-j2 \\ X[2] &= P[1] = -j4 & X[6] &= P[3] = j4 \\ X[3] &= Q[1] = 2-j2 & X[7] &= Q[3] = 2-j2 \end{aligned}$$

这和题 6.57 的结果一样。

6.60 考虑一因果连续时间带限信号 $x(t)$,其傅里叶变换为 $X(\omega)$,设

$$x[n] = T_s x(nT_s) \tag{6.233}$$

其中 T_s 是时域抽样间隔,设

$$X[k] = X(k\Delta\omega) \tag{6.234}$$

其中 $\Delta\omega$ 是频域抽样间隔,称作频率分辨率。设 T_1 是 $x(t)$记录的长度,ω_M 是 $x(t)$的最高频率。证明如果满足

$$\frac{T_1}{T_s} = \frac{2\omega_M}{\Delta\omega} = N \qquad \text{且} \qquad N \geqslant \frac{\omega_M T_1}{\pi} \tag{6.235}$$

则 $x[n]$和 $X[k]$组成一对 N 点的 DFT 变换对。

证 因为 $t<0$ 时 $x(t)=0$,$x(t)$的傅里叶变换 $X(\omega)$由式(5.31)给出

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{0}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \tag{6.236}$$

设 T_1 是计算 $X(\omega)$总的 $x(t)$记录的长度。上式积分可近似表示为级数

$$X(\omega) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x(t_n) e^{-j\omega t_n}$$

其中 $t_n = n\Delta t, T_1 = N\Delta t$。令上式中 $\omega = \omega_k$，得

$$X(\omega) = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x(t_n) e^{-j\omega_k t_n} \tag{6.237}$$

因为 ω_M 是$x(t)$的最高频率，式(5.32)给出了傅里叶反变换

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_M}^{\omega_M} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \tag{6.238}$$

把频率范围 $-\omega_M \leqslant \omega \leqslant \omega_M$ 分为间隔 $\Delta\omega$ 的 N(偶数个)区间，上式积分可近似计算为

$$x(t) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{K=-N/2}^{(N/2)-1} X(\omega_k) e^{j\omega_k t}$$

其中 $2\omega_M = N\Delta\omega$，设上式中 $t = t_n$ 得

$$x(t_n) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{K=-N/2}^{(N/2)-1} X(\omega_k) e^{j\omega_k t_n} \tag{6.239}$$

因为 ω_M 是$x(t)$的最高频率，由抽样理论(题 5.59)，对 $x(t)$抽样，得

$$\frac{2\pi}{T_s} \geqslant 2\omega_M$$

其中 T_s 是抽样间隔。因 $T_s = \Delta t$，选择 Δt 的最大值得

$$\Delta t = \frac{\pi}{\omega_M}$$

$$\omega_M = \frac{\pi}{\Delta t} = \frac{\pi N}{T_1} \tag{6.240}$$

N是一个满足下面条件的偶整数，

$$\frac{T_1}{T_s} = \frac{2\omega_M}{\Delta\omega} = N \qquad N \geqslant \frac{\omega_M T_1}{\pi} \tag{6.241}$$

由式(6.240)得频率分辨率

$$\Delta\omega = \frac{2\omega_M}{N} = \frac{2\pi N}{NT_1} = \frac{2\pi}{T_1} \tag{6.242}$$

设 $t_n = n\Delta t, \omega_k = k\Delta\omega$，则

$$t_n\omega_k = (n\Delta t)(k\Delta\omega) = nk\frac{T_1}{N}\frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi}{N}nk \tag{6.243}$$

将上式代入式(6.237)和(6.239)得

$$X(k\Delta\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t x(n\Delta t) e^{-j(2\pi/N)nk} \tag{6.244}$$

$$x(n\Delta t) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \sum_{k=-N/2}^{(N/2)-1} X(k\Delta\omega) e^{j(2\pi/N)nk} \tag{6.245}$$

重写式(6.245)得

$$x(n\Delta t) = \frac{\Delta\omega}{2\pi}\left[\sum_{k=0}^{(N/2)-1} X(k\Delta\omega) e^{j(2\pi/N)nk} + \sum_{k=-N/2}^{-1} X(k\Delta\omega) e^{j(2\pi/N)nk}\right]$$

从式(6.244)我们注意到 $X(k\Delta\omega)$是以 N 为周期的，这样，上式中改变第二项求和变量 $k = m - N$，得

$$x(n\Delta t) = \frac{\Delta\omega}{2\pi}\left[\sum_{k=N}^{(N/2)-1} X(k\Delta\omega) e^{j(2\pi/N)nk} + \sum_{m=N/2}^{N-1} X(m\Delta\omega) e^{j(2\pi/N)nm}\right]$$

$$= \frac{\Delta\omega}{2\pi}\sum_{k=N}^{N-1} X(k\Delta\omega) e^{j(2\pi/N)nk} \tag{6.246}$$

上式两边同乘 Δt(注意 $\Delta\omega\Delta t = 2\pi/N$)得

$$x(n\Delta t)\Delta t = \frac{1}{N}\sum_{K=0}^{N-1} X(k\Delta\omega) e^{j(2\pi/N)nk} \tag{6.247}$$

令

$$x[n] = \Delta t x(n\Delta t) = T_s x(nT_s) \tag{6.248}$$

$$X[k] = X(k\Delta\omega) \tag{6.249}$$

那么式(6.244)和(6.247)化简为 DFT 对，即

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn} \qquad k = 0,1,\cdots,N-1$$

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X[k]W_N^{-kn} \qquad k = 0,1,\cdots,N-1$$

6.61 (a) 用 DFT 估计下面信号的频谱：

$$x(t) = e^{-t}u(t)$$

设总的记录时间为 $T_1 = 10\text{s}$，且 $\omega_M = 100\text{rad/s}$。

(b) 设 $X[k]$为 $x(t)$的抽样序列的 DFT。比较 $X[0]$, $X[1]$和 $X[10]$与 $X(0)$, $X(\Delta\omega)$, $X(10\Delta\omega)$的值。

[redacted] (a) 由式(6.241)得

$$N \geqslant \frac{\omega_M T_1}{\pi} = \frac{100(10)}{\pi} = 318.3$$

这样，选择 $N = 320$，我们得

$$\Delta\omega = \frac{200}{320} = \frac{5}{8} = 0.625\text{rad}$$

$$\Delta t = \frac{10}{320} = \frac{1}{32} = 0.031\text{s}$$

$$W_N = W_{320} = e^{-j(2\pi/320)}$$

由式(6.244)、(6.249)和(1.92)得

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t x(n\Delta t)e^{-j(2\pi/N)nk} \\ &= \frac{1}{32}\sum_{n=0}^{319} e^{-n(0.031)}e^{-j(2\pi/320)nk} = \frac{1}{32}\frac{1-e^{320(0.031)}}{1-e^{-0.031}e^{-j(2\pi/320)k}} \\ &= \frac{0.031}{[1-0.969\cos(k\pi/160)]+j0.969\sin(k\pi/160)} \end{aligned} \tag{6.250}$$

这就是 $X(k\Delta\omega)$的估计值。

(b) 设式(6.250)中 $k=0$, $k=1$, $k=10$ 得

$$X[0] = \frac{0.031}{1-0.969} = 1$$

$$X[1] = \frac{0.031}{0.0312+j0.019} = 0.855e^{-j0.547}$$

$$X[10] = \frac{0.031}{0.0496-j0.189} = 0.159e^{-j1.314}$$

由表 5-2 得　$x(t) = e^{-t}u(t) \leftrightarrow X(\omega) = \dfrac{1}{j\omega+1}$

从而得

$$X(0) = 1$$

$$X(\Delta\omega) = X(0.625) = \frac{1}{j0.625+1} = 0.848e^{-j0.559}$$

$$X(10\Delta\omega) = X(6.25) = \frac{1}{j6.25+1} = 0.158e^{-j1.412}$$

即便 $x(t)$不是带限的，可看出 $X[k]$提供了一个在我们指定的频率范围内估算 $X(\omega)$的好方法。

补充习题

6.62 求下列周期序列的离散傅里叶级数：

(a) $x[n] = \cos(0.1\pi n)$

(b) $x[n] = \sin(0.1\pi n)$

(c) $x[n] = 2\cos(1.6\pi n) + \sin(2.4\pi n)$

答案　(a) $x[n] = \dfrac{1}{2}e^{j\Omega_0 n} + \dfrac{1}{2}e^{j19\Omega_0 n}$, $\Omega_0 = 0.1\pi$

(b) $x[n]=\frac{1}{2j}e^{j\Omega_0 n}-\frac{1}{2j}e^{j19\Omega_0 n}$, $\Omega_0=0.1\pi$

(c) $x[n]=(1-j0.5)e^{j\Omega_0 n}+(1+j0.5)e^{j4\Omega_0 n}$, $\Omega_0=0.4\pi$

6.63 求图 6-40 所示的序列 $x[n]$的离散傅里叶级数。

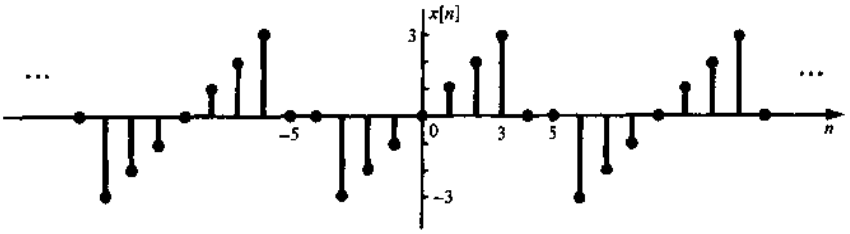


图 6-40

答案 $x[n]=\sum_{k=0}^{8}c_k e^{j\Omega_0 kn}$, $\Omega_0=\frac{2\pi}{9}$

$$c_k=-j\frac{2}{9}\left[\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)k+2\sin\left(\frac{4\pi}{9}\right)k+3\sin\left(\frac{6\pi}{9}\right)k\right]$$

6.64 求题 6.3 中图 6-7 所示的序列 $x[n]$的三角形式的傅里叶级数。

答案 $x[n]=\frac{3}{2}-\cos\frac{\pi}{2}n-\sin\frac{\pi}{2}n-\frac{1}{2}\cos n\pi$

6.65 求下列序列的傅里叶变换：

(a) $x[n]=a^{|n|}$, $|a|<1$

(b) $x[n]=\sin(\Omega_0 n)$, $|\Omega_0|<\pi$

(c) $x[n]=u[-n-1]$

答案 (a) $X(\Omega)=\frac{1-a^2}{1-2a\cos\Omega+a^2}$

(b) $X(\Omega)=-j\pi[\delta(\Omega-\Omega_0)-\delta(\Omega-\Omega_0)]$, $|\Omega|,|\Omega_0|\leqslant\pi$

(c) $X(\Omega)=\pi\delta(\Omega)-\frac{1}{1-e^{-j\Omega}}$, $|\Omega|\leqslant\pi$

6.66 求图 6-41 所示序列的傅里叶变换。

答案 $X(\Omega)=j2(\sin\Omega+2\sin2\Omega+3\sin3\Omega)$

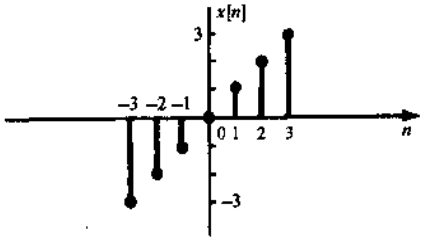


图 6-41

6.67 求下列傅里叶变换的反变换：

(a) $X(\Omega)=\cos(2\Omega)$

(b) $X(\Omega)=j\Omega$

答案 (a) $x[n]=\frac{1}{2}\delta[n-2]+\frac{1}{2}\delta[n+2]$

(b) $x[n]=\begin{cases}(-1)^n/n & n\neq0\\ 0 & n=0\end{cases}$

6.68 已知 $y[n]=\begin{cases}x[n] & n\text{ 为偶数}\\ 0 & n\text{ 为奇数}\end{cases}$，用 $X(\Omega)$表示 $Y(\Omega)$。

答案 $Y(\Omega)=\frac{1}{2}X(\Omega)+\frac{1}{2}X(\Omega-\pi)$

6.69 设 $x[n]=\begin{cases}1 & |n|\leqslant2\\ 0 & |n|>2\end{cases}$

(a) 求 $y[n]=x[n]*x[n]$，

(b) 求 $y[n]$的傅里叶变换 $Y(\Omega)$。

答案 (a) $y[n]=\begin{cases}5(1-|n|/5 & |n|\leqslant5\\ 0 & |n|>5\end{cases}$

(b) $Y(\Omega)=\left(\frac{\sin(2.5\Omega)}{\sin(0.5\Omega)}\right)^2$

6.70 证明帕斯瓦尔定理

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}|X(\Omega)|^2d\Omega$$

提示　用与习题 5.38 相似的方法进行。

6.71　一因果离散时间 LTI 系统由下式描述：

$$y[n]-\frac{3}{4}y[n-1]+\frac{1}{8}y[n-2]=x[n]$$

其中 $x[n]$和 $y[n]$分别是系统的输入和输出。

(a) 求系统的频率响应 $H(\Omega)$。

(b) 求系统的脉冲响应 $h[n]$。

(c) 如果 $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$，求 $y[n]$。

答案　(a) $H(\Omega)=\dfrac{1}{1-\frac{3}{4}e^{-j\Omega}+\frac{1}{8}e^{-2j\Omega}}$

(b) $h[n]=\left[2\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]u[n]$

(c) $y[n]=\left[\left(\frac{1}{4}\right)^n+n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]u[n]$

6.72　一因果离散时间 LTI 系统，其频率响应为

$$H(\Omega)=\mathrm{Re}[H(\Omega)]+j\mathrm{Im}[H(\Omega)]=A(\Omega)+jB(\Omega)$$

(a) 证明系统的脉冲响应 $h[n]$可只通过 $A(\Omega)$或 $B(\Omega)$求出来，

(b) 如果

$$\mathrm{Re}[H(\Omega)]=A(\Omega)=1-\cos\Omega$$

求 $H(\Omega)$和 $h[n]$。

答案　(a) 提示：用与习题 5.49 相似的方法做。

(b) $H(\Omega)=1+e^{-j\Omega}$，$h[n]=\delta[n]+\delta[n-1]$

6.73　求图 6-42 所示的截频为 $\Omega_c(0<\Omega_c<\pi)$理想离散时间高通滤波器(HPF)的脉冲响应 $h[n]$。

答案　$h[n]=\delta[n]-\dfrac{\sin\Omega_c n}{\pi n}$

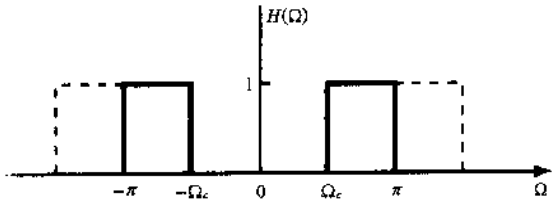


图 6-42

6.74　如果 $H_{LPF}(z)$是离散时间低通滤波器的系统函数，试证明 $H(z)=H_{LPF}(-z)$为离散时间高通滤波器。

提示　用题 6.37 中的式(6.156)。

6.75　一连续时间 LTI 系统的系统函数为

$$H_c(s)=\frac{1}{(s+1)^2}$$

确定根据这个系统用冲激响应不变法设计的离散时间系统的频率响应 $H_d(\Omega)$。

答案　$H(\Omega)=T_s e^{-T_s}\dfrac{e^{-j\Omega}}{(1-e^{-T_s}e^{-j\Omega})^2}$，其中 T_s 是 $h_c(t)$的抽样间隔。

6.76　一连续时间 LTI 系统的系统函数为

$$H_c(s)=\frac{1}{s+1}$$

求根据这个系统用阶跃响应不变法(step response invariance)求得的离散时间系统的频率响应 $H_d(\Omega)$，即

$$s_d[n]=s_c(nT_s)$$

其中 $s_c(t)$和 $s_d[n]$分别是连续时间和离散时间的阶跃响应。提示：

$$h_d[n]=s_d[n]-s_d[n-1]$$

答案　$H_d(\Omega)=\dfrac{(1-e^{-T_s})e^{-j\Omega}}{1-e^{-T_s}e^{-j\Omega}}$

6.77 设 $H_p(z)$为原型离散低通滤波器的系统函数，将 $H_p(z)$中 z 用$(z-\alpha)/(1-\alpha z)$替代，其中 α 为实数。

(a) 证明

$$H_p(z)\mid_{z=1+j_0} = H(z)\mid_{1+j_0}$$

$$H_p(z)\mid_{z=-1+j_0} = H(z)\mid_{-1+j_0}$$

(b) 设 Ω_{p1}和 Ω_1 分别是原型低通滤波器和新的低通滤波器的指定频率($<\pi$)，证明

$$\alpha = \frac{\sin[(\Omega_{p1}-\Omega_1)/2]}{\sin[(\Omega_{p1}+\Omega_1)/2]}$$

提示 设 $e^{j\Omega_{p1}} = \dfrac{e^{j\Omega_1}-\alpha}{1-\alpha e^{j\Omega_1}}$，解 α。

6.78 一离散时间原型低通滤波器系统函数为

$$H_p(z) = 0.5(1+z^{-1})$$

(a) 求原型滤波器的 3dB 带宽。

(b) 由原型滤波器设计一离散低通滤波器，满足 3dB 带宽为 $2\pi/3$。

提示用 6.77 的结果

答案 (a) $\Omega_{3dB} = \dfrac{\pi}{2}$

(b) $H(z) = 0.634\dfrac{1+z^{-1}}{1+0.268z^{-1}}$

6.79 求序列 $x[n]=a^n$　$0\leqslant n\leqslant N-1$ 的 DFT。

答案 $X[k] = \dfrac{1-a^N}{1-ae^{-j(2\pi/N)k}}$　$k=0,1,\cdots N-1$

6.80 计算循环卷积 $y[n]=x[n]\otimes h[n]$，其中

$$x[n] = u[n]-u[n-4]$$

$$h[n] = u[n]-u[n-3]$$

(a) 当 $N=4$ 时　(b)当 $N=8$ 时

答案 (a) $y[n]=\{3,3,3,3\}$

(b) $y[n]=\{1,2,3,3,2,1,0,0\}$

6.81 对题 6.80 中 $x[n]$和 $h[n]$，

(a) 求 $x[n]$和 $h[n]$，$y[n]$的 4 点的 DFT。

(b) 对 $Y[k]$作 IDFT 求 $y[n]$。

答案 (a) $[X[0],X[1],X[2],X[3]]=[4,0,0,0]$

$[H[0],H[1],H[2],H[3]]=[3,-j,1,j]$

$[Y[0],Y[1],Y[2],Y[3]]=[12,0,0,0]$

(b) $y[n]=\{3,3,3,3\}$

6.82 考察一连续时间信号 $x(t)$，该信号已用截频为 10kHz 的低通滤波器进行了预滤波。用 N 点 DFT 估算 $x(t)$的频谱，要求的频谱分辨率为 0.1Hz。试确定 N(假定为 2 的幂)的值所需的数据长度 T_1。

答案 $N=2^{18}$，$T_1=13.1072$s

第7章 状态空间分析

7.1 引言

前面研究了基于输入输出关系描述的线性时不变系统，这种描述方法着眼于系统的外部特性。本章将讨论系统的状态空间描述法，用这种方法可以描述系统的内部特性。用状态空间描述系统有很多优点：

1. 能够揭示系统的内部特性。

2. 可以使我们用统一方法处理多输入和多输出系统。

3. 这种方法可以扩展到非线性时变系统的分析。

因为状态空间描述是以矩阵方程给出的，所以读者应该对矩阵或线性代数有一定的熟悉程度。矩阵简介参见附录A。

7.2 状态的概念

A. 定义

一个系统在 t_0(或 n_0)时的状态定义为表示系统的一组最少信息，只要知道 $t \geqslant t_0$(或 $n \geqslant n_0$)时的输入，这组信息就能确定系统在任意时间 $t \geqslant t_0$(或 $n \geqslant n_0$)的状态和输出，包含这些信息的变量叫状态变量。注意这种系统状态的定义只适用于因果系统。

对于单输入单输出LTI电路而言，如果它的结构已知且在 $-\infty$ 到 t 时间范围的输入 $x(t)$ 已知，那么就足以决定在该时间范围内的输出 $y(t)$。然而，如果只知道 t_0 到 t 时间范围的输入，那么就必须知道在 t_0 时通过电感的电流和电容两端的电压才能确定 t_0 到 t 时间范围的输出 $y(t)$。这些电流和电压组成了电路在 t_0 时的状态。从这种意义上说，电路的状态与电路的记忆元件有关。

B. 状态变量的选择

系统的状态变量可以理解为系统的记忆元素。对于由单位延时器、放大器和加法器组成的离散时间系统，选择单位延时器的输出作为系统的状态变量(习题7.1)。对于由积分器、放大器和加法器组成的连续时间系统，选择积分器的输出作为状态变量(习题7.3)。对于包含物理储能元件的连续时间系统，可以选择这些储能元件的输出作为系统的状态变量(习题7.4和7.5)。如果系统是用差分方程或微分方程描述的，状态变量可以按照下节所述方法选择。

注意，状态变量的选择不是惟一的，对任何一个系统都有很多个选择。

7.3 离散时间线性时不变系统状态空间的表示

A. 用差分方程描述的系统

假设一个单输入单输出离散时间线性时不变系统是用 N 阶差分方程描述为

$$y[n] + a_1 y[n-1] + \cdots + a_N y[n-N] = x[n] \tag{7.1}$$

从前面的讨论可知，如果 $x[n]$ 在 $n \geqslant 0$ 时作用在系统上，方程(7.1)需要 N 个初始条件 $y[-1], y[-2], \cdots, y[-N]$ 才能惟一确定 $n \geqslant 0$ 时的完全解。也就是说，要确定系统在任意时刻的状态需要知道 N 个值。

定义 N 个状态变量

$$q_1[n] = y[n-N]$$
$$q_2[n] = y[n-(N-1)] = y[n-N+1]$$
$$\vdots$$
$$q_N[n] = y[n-1] \tag{7.2}$$

由式(7.1)和(7.2),可得

$$q_1[n+1] - q_2[n]$$
$$q_2[n+1] = q_3[n]$$
$$\vdots$$
$$q_N[n+1] = -a_N q_1[n] - a_{N-1} q_2[n] - \cdots - a_1 q_N[n] + x[n] \tag{7.3a}$$

和

$$y[n] = -a_N q_1[n] - a_{N-1} q_2[n] - \cdots - a_1 q_N[n] + x[n] \tag{7.3b}$$

式(7.3a)和(7.3b)用矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} q_1[n+1] \\ q_2[n+1] \\ \vdots \\ q_N[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_N & -a_{N-1} & -a_{N-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \\ \vdots \\ q_N[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} x[n] \tag{7.4a}$$

$$y[n] = \begin{bmatrix} -a_N & -a_{N-1} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \\ \vdots \\ q_N[n] \end{bmatrix} + [1]x[n] \tag{7.4b}$$

现在定义一个称之为状态矢量的 $N\times 1$ 矩阵(或 N 维向量)$\mathbf{q}[n]$:

$$\mathbf{q}[n] = \begin{bmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \\ \vdots \\ q_N[n] \end{bmatrix} \tag{7.5}$$

则式(7.4a)和(7.4b)可被重新写为

$$\mathbf{q}[n+1] = \mathbf{A}\mathbf{q}[n] + \mathbf{b}x[n] \tag{7.6a}$$
$$y[n] = \mathbf{c}\mathbf{q}[n] + dx[n] \tag{7.6b}$$

式中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_N & -a_{N-1} & -a_{N-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} -a_N & -a_{N-1} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \qquad d = 1$$

式(7.6a)和(7.6b)称作系统的 N 维状态空间表示式(或状态方程),$N\times N$ 矩阵 $\mathbf{A}$ 称作系统矩阵。式(7.6a)和(7.6b)在给定初状态下的解将在7.5节讨论。

B. 相似变换

前面提到,状态变量的选择不是惟一的,对任意的系统,状态变量有许多种选择。设 $\mathbf{T}$ 是一任意的 $N\times N$ 的满秩矩阵(附录A),定义一新的状态矢量

$$\mathbf{v}[n] = \mathbf{T}\mathbf{q}[n] \tag{7.7}$$

式中 $\mathbf{q}[n]$ 是满足(7.6a)和(7.6b)的旧状态矢量。因为 $\mathbf{T}$ 是满秩矩阵,即 $\mathbf{T}^{-1}$ 存在,所以

$$\mathbf{q}[n] = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{v}[n] \tag{7.8}$$

这样,

$$\mathbf{v}[n+1]=\mathbf{Tq}[n+1]=\mathbf{T}(\mathbf{Aq}[n]+\mathbf{b}x[n])$$
$$=\mathbf{TAq}[n]+\mathbf{Tb}x[n]=\mathbf{TAT}^{-1}\mathbf{v}[n]+\mathbf{Tb}x[n] \tag{7.9a}$$
$$y[n]=\mathbf{cq}[n]+dx[n]=\mathbf{cT}^{-1}\mathbf{v}[n]+dx[n] \tag{7.9b}$$

如果令

$$\hat{\mathbf{A}}=\mathbf{TAT}^{-1} \tag{7.10a}$$
$$\hat{\mathbf{b}}=\mathbf{Tb}\qquad \mathbf{c}=\mathbf{cT}^{-1}\qquad \hat{d}=d \tag{7.10b}$$

那么式(7.9a)和(7.9b)变成

$$\mathbf{v}[n+1]=\hat{\mathbf{A}}\mathbf{v}[n]+\hat{\mathbf{b}}x[n] \tag{7.11a}$$
$$y[n]=\hat{\mathbf{c}}\mathbf{v}[n]+\hat{d}x[n] \tag{7.11b}$$

不同的状态方程对于给定的输入 $x[n]$,通过式(7.11a)、(7.11b)可得出同样的输出 $y[n]$。代数矩阵方程(7.10a)称为相似变换,矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $\hat{\mathbf{A}}$ 称作相似矩阵。

C. 多输入多输出系统

如果离散时间线性时不变系统有 m 个输入和 p 个输出、N 个状态变量,那么这个系统的状态空间表示式为

$$\mathbf{q}[n+1]=\mathbf{Aq}[n]+\mathbf{Bx}[n] \tag{7.12a}$$
$$\mathbf{y}[n]=\mathbf{Cq}[n]+\mathbf{Dx}[n] \tag{7.12b}$$

式中

$$\mathbf{q}[n]=\begin{bmatrix}q_1[n]\\q_2[n]\\\vdots\\q_N[n]\end{bmatrix}\quad \mathbf{x}[n]=\begin{bmatrix}x_1[n]\\x_2[n]\\\vdots\\x_m[n]\end{bmatrix}\quad \mathbf{y}[n]=\begin{bmatrix}y_1[n]\\y_2[n]\\\vdots\\y_p[n]\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1N}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2N}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{N1}&a_{N2}&\cdots&a_{NN}\end{bmatrix}_{N\times N}\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1m}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2m}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{N1}&b_{N2}&\cdots&b_{Nm}\end{bmatrix}_{N\times m}$$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1N}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2N}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\c_{p1}&c_{p2}&\cdots&c_{pN}\end{bmatrix}_{p\times N}\quad \mathbf{D}=\begin{bmatrix}d_{11}&d_{12}&\cdots&d_{1m}\\d_{21}&d_{22}&\cdots&d_{2m}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\d_{p1}&d_{p2}&\cdots&d_{pm}\end{bmatrix}_{p\times m}$$

7.4 连续时间线性时不变系统状态空间的表示

A. 用微分方程描述的系统

假设用 N 阶微分方程描述的单输入单输出连续时间线性时不变系统为

$$\frac{d^Ny(t)}{dt^N}+a_1\frac{d^{N-1}y(t)}{dt^{N-1}}+\cdots+a_Ny(t)=x(t) \tag{7.13}$$

$y(0),y^{(1)}(0),\cdots,y^{(N-1)}(0)$是一组初始条件,其中 $y^{(k)}(t)=d^ky(t)/dt^k$。定义 N 个状态变量 $q_1(t),q_2(t),\cdots,q_N(t)$为

$$\begin{aligned}q_1(t)&=y(t)\\q_2(t)&=y^{(1)}(t)\\&\vdots\\q_N(t)&=y^{(N-1)}(t)\end{aligned} \tag{7.14}$$

由式(7.13)和(7.14),可得

$$\dot{q}_1(t) = q_2(t)$$

$$\dot{q}_2(t) = q_3(t)$$

$$\vdots$$

$$\dot{q}_N(t) = -a_N q_1(t) - a_{N-1} q_2(t) \cdots - a_1 q_N(t) + x(t) \tag{7.15a}$$

和

$$y(t) = q_1(t) \tag{7.15b}$$

式中

$$q_k = dq_k(t)/dt$$

式(7.15a)、(7.15b)用矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{q}_N(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_N & -a_{N-1} & -a_{N-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_N(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} x(t) \tag{7.16a}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_N(t) \end{bmatrix} \tag{7.16b}$$

定义一个我们称之为状态矢量的 $N \times 1$ 矩阵(或 N 维向量)$\mathbf{q}(t)$:

$$\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_N(t) \end{bmatrix} \tag{7.17}$$

矩阵的导数可通过对矩阵的每个元素求导得到,因此

$$\frac{d\mathbf{q}(t)}{dt} = \dot{\mathbf{q}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{q}_N(t) \end{bmatrix} \tag{7.18}$$

式(7.16a)和(7.16b)可写成

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{q}(t) + \mathbf{b}x(t) \tag{7.19a}$$

$$y(t) = \mathbf{c}\mathbf{q}(t) \tag{7.19b}$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_N & -a_{N-1} & -a_{N-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

同离散时间系统一样,式(7.19a)和(7.19b)称作系统的 N 维状态空间表示式(或状态方程),$N \times N$ 矩阵 $\mathbf{A}$ 称作系统矩阵。一般,单输入单输出连续时间时不变系统的状态方程由下列两式给定:

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{q}(t) + \mathbf{B}\mathbf{x}(t) \tag{7.20a}$$

$$y(t) = \mathbf{c}\mathbf{q}(t) + dx(t) \tag{7.20b}$$

同离散时间系统一样,对任意给定的系统,状态变量的选择有很多种。式(7.20a)和(7.20b)在给定初状态下的解将在 7.6 节讨论。

B. 多输入多输出系统

如果连续时间线性时不变系统有 m 个输入、p 个输出和 N 个状态变量，那么该系统的状态空间表示为

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{q}(t) + \mathbf{B}\mathbf{x}(t) \tag{7.21a}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{q}(t) + \mathbf{D}\mathbf{x}(t) \tag{7.21b}$$

其中

$$\mathbf{q}(t) = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_N(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{bmatrix}_{N\times N} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{N1} & b_{N2} & \cdots & b_{Nm} \end{bmatrix}_{N\times m}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1N} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{p1} & c_{p2} & \cdots & c_{pN} \end{bmatrix}_{p\times N} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{p1} & d_{p2} & \cdots & d_{pm} \end{bmatrix}$$

7.5 离散时间线性时不变系统状态方程的解

A. 时域求解

离散时间系统用 N 维状态空间描述为

$$\mathbf{q}[n+1] = \mathbf{A}\mathbf{q}[n] + \mathbf{b}x[n] \tag{7.22a}$$

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{c}\mathbf{q}[n] + dx[n] \tag{7.22b}$$

其中 $\mathbf{A}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$、d 分别是 $N\times N$, $N\times 1$, $1\times N$ 和 1×1 矩阵。给定初始状态 $\mathbf{q}[0]$，求 $\mathbf{q}[n]$ 的一种方法是用迭代法反复解式(7.22a)。具体做法如下。

$$\mathbf{q}[1] = \mathbf{A}\mathbf{q}[0] + \mathbf{b}x[0]$$

$$\mathbf{q}[2] = \mathbf{A}\mathbf{q}[1] + \mathbf{b}x[1] = \mathbf{A}[\mathbf{A}\mathbf{q}[0] + \mathbf{b}x[0]] + \mathbf{b}x[1]$$

$$= \mathbf{A}^2\mathbf{q}[0] + \mathbf{A}\mathbf{b}x[0] + \mathbf{b}x[1]$$

这样迭代下去，可得

$$\mathbf{q}[n] = \mathbf{A}^n\mathbf{q}[0] + \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}x[0] + \cdots + \mathbf{b}x[n-1]$$

$$= \mathbf{A}^n\mathbf{q}[0] + \sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{A}^{n-1-k}\mathbf{b}x[k] \qquad n > 0 \tag{7.23}$$

如果初始状态是 $\mathbf{q}[n_0]$，$x[n]$ 是 $n > n_0$ 时的值，用类似的方法可得到

$$\mathbf{q}[n] = \mathbf{A}^{n-n_0}\mathbf{q}[n_0] + \sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{A}^{n-1-k}\mathbf{b}x[n_0+k] \qquad n > n_0 \tag{7.24}$$

矩阵 $\mathbf{A}^n = \underbrace{\mathbf{A}\ \mathbf{A}\ \cdots\ \mathbf{A}}_{n}$ 称作离散时间系统的状态转移矩阵。把式(7.23)代入式(7.24)，可得

$$y[n] = \mathbf{c}\mathbf{A}^n\mathbf{q}[n_0] + \sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{c}\mathbf{A}^{n-1-k}\mathbf{b}x[k] + dx[n] \quad n > 0 \tag{7.25}$$

第一项 $\mathbf{c}\mathbf{A}^n\mathbf{q}[n_0]$ 是零输入响应，第二项第三项共同组成零状态响应。

B. $\mathbf{A}^n$ 的确定

方法 1：设 $\mathbf{A}$ 是一个 $N\times N$ 矩阵，$\mathbf{A}$ 的特征方程定义为(附录A)

$$c(\lambda) = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0 \tag{7.26}$$

其中$|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}|$是$\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}$的行列式,$\mathbf{I}$是$N$阶单位矩阵。$c(\lambda)=0$的根$\lambda_k(k=1,2,\cdots,N)$称作$\mathbf{A}$的特征根。按照 Cayley-Hamilton 定理,$\mathbf{A}^n$可表示为[附录 A,式(A.57)]

$$\mathbf{A}^n = b_0\mathbf{I} + b_1\mathbf{A} + \cdots + b_{N-1}\mathbf{A}^{N-1} \tag{7.27}$$

当特征根λ_k为单根时,系数$b_0, b_1, \cdots, b_{N-1}$可由下列条件求出:

$$b_0 + b_1\lambda_k + \cdots + b_{N-1}\lambda_k^{N-1} = \lambda_k^n \qquad k = 0,1,\cdots,N \tag{7.28}$$

重特征根情况,参看习题 7.25。

方法 2:化对角阵法,将矩阵A化为对角阵。

如果$\mathbf{A}$的特征根λ_k为单根,那么$\mathbf{A}^n$可表示为[附录 A,式(A.53)]

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{P}\begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N^n \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1} \tag{7.29}$$

其中$\mathbf{P}$称作对角化矩阵,可表示为[附录 A,式(A.36)]

$$\mathbf{P} = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{x}_N] \tag{7.30}$$

$\mathbf{x}_k$是$\mathbf{A}$的特征向量,可表示为

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_k = \lambda_k\mathbf{x}_k \qquad k = 1,2,\cdots,N \tag{7.31}$$

方法 3:矩阵谱分解法。

当$\mathbf{A}$的特征根λ_k为单根时,$\mathbf{A}$可表示为

$$\mathbf{A} = \lambda_1\mathbf{E}_1 + \lambda_2\mathbf{E}_2 + \cdots + \lambda_N\mathbf{E}_N = \sum_{k=1}^{N}\lambda_k\mathbf{E}_k \tag{7.32}$$

其中λ_k是$\mathbf{A}$的单特征根,$\mathbf{E}_k(k=1,2,\cdots,N)$称作结构(constituent)矩阵并且可以通过下式计算[附录 A,式(A.67)]:

$$\mathbf{E}_k = \frac{\prod\limits_{\substack{m=1\\m\neq k}}^{N}(\mathbf{A}-\lambda_m\mathbf{I})}{\prod\limits_{\substack{m=1\\m\neq k}}^{N}(\lambda_k-\lambda_m)} \tag{7.33}$$

因此有

$$\mathbf{A}^n = \lambda_1^n\mathbf{E}_1 + \lambda_2^n\mathbf{E}_2 + \cdots + \lambda_N^n\mathbf{E}_N \tag{7.34}$$

方法 4:z变换法。

$$\mathbf{A}^n = \mathscr{Z}_I^{-1}\{(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}z\} \tag{7.35}$$

这种方法将在下节讨论。

C.z域求解

对式(7.22a)和(7.22b)做单边z变换,并利用式(4.51),可得到

$$z\mathbf{Q}(z) - z\mathbf{q}(0) = \mathbf{A}\mathbf{Q}(z) + \mathbf{b}X(z) \tag{7.36a}$$

$$Y(z) = \mathbf{c}\mathbf{Q}(z) + dX(z) \tag{7.36b}$$

其中

$$X(z) = \mathscr{Z}_I\{x[n]\}, Y(z) = \mathscr{Z}_I\{y[n]\}$$

$$\mathbf{Q}(z) = \mathscr{Z}_I\{q[n]\} = \begin{bmatrix} Q_1(z) \\ Q_2(z) \\ \vdots \\ Q_N(z) \end{bmatrix} \qquad Q_k(z) = \mathscr{Z}_I\{q_k[n]\}$$

重写式(7.36a),有

$$(z\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{Q}(z)=z\mathbf{q}(0)+\mathbf{b}X(z) \tag{7.37}$$

式(7.37)两边左乘$(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$得

$$\mathbf{Q}(z)=(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}z\mathbf{q}(0)+(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}X(z) \tag{7.38}$$

对上式作单边 Z 反变换得

$$\mathbf{q}[n]=\mathscr{Z}_I^{-1}\{(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}z\}\mathbf{q}(0)+\mathscr{Z}_I^{-1}\{(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}X(z)\} \tag{7.39}$$

将式(7.39)代入式(7.22b)得

$$y(n)=\mathbf{c}\mathscr{Z}_I^{-1}\{(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}z\}\mathbf{q}(0)+\mathbf{c}\mathscr{Z}_I^{-1}\{(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}X(z)\}+dx[n] \tag{7.40}$$

比较式(7.39)与式(7.23),即得

$$\mathbf{A}^n=\mathscr{Z}_I^{-1}\{(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}z\} \tag{7.41}$$

D. *系统函数 $H(z)$*

在4.6节,离散时间线性时不变系统的系统函数定义为,零状态条件下 $H(z)=Y(z)/X(z)$。令式(7.38)中 $\mathbf{q}[0]=\mathbf{0}$,可得

$$\mathbf{Q}(z)=(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}X(z) \tag{7.42}$$

将式(7.42)代入式(7.36b)得

$$Y(z)=[\mathbf{c}(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}+d]X(z) \tag{7.43}$$

于是

$$H(z)=[\mathbf{c}(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}+d] \tag{7.44}$$

E. *稳定性*

由式(7.25)、(7.29)和(7.34)可知,如果系统矩阵 $\mathbf{A}$ 的所有特征根 λ_k 的数值小于1,即

$$|\lambda_k|<1 \qquad \text{对所有 } k \tag{7.45}$$

那么系统称为渐进稳定。也就是说,在没有外界激励的情况下,系统状态将由任意有限的初始状态 $\mathbf{q}_0$ 趋向于0。可以证明,如果 $\mathbf{A}$ 的所有特征根为单根且满足条件式(7.45),那么系统是BIBO稳定。

7.6 连续时间线性时不变系统状态方程的解

A. *拉普拉斯变换法*

连续时间系统的 N 维状态空间描述为

$$\dot{\mathbf{q}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{q}(t)+\mathbf{b}x(t) \tag{7.46a}$$

$$y(t)=\mathbf{c}\mathbf{q}(t)+dx(t) \tag{7.46b}$$

其中 $\mathbf{A},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 和 d 分别是 $N\times N$, $N\times 1$, $1\times N$ 和 1×1 矩阵,给定初始状态为 $\mathbf{q}(0)$,对(7.46a)和(7.46b)做单边拉普拉斯变换并利用式(3.44),得

$$s\mathbf{Q}(s)-\mathbf{q}(0)=\mathbf{A}\mathbf{Q}(s)+\mathbf{b}X(s) \tag{7.47a}$$

$$Y(s)=\mathbf{c}\mathbf{Q}(s)+dX(s) \tag{7.47b}$$

式中

$$X(s)=\mathscr{L}_I\{x(t)\},\ Y(s)=\mathscr{L}_I\{y(t)\},$$

$$\mathbf{Q}(s)=\mathscr{L}_I\{\mathbf{q}(t)\}=\begin{bmatrix}Q_1(s)\\Q_2(s)\\\vdots\\Q_N(s)\end{bmatrix} \qquad \text{式中 } Q_k(s)=\mathscr{L}_I\{q_k(t)\}$$

将式(7.47a)改写为

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{Q}(s)=\mathbf{q}(0)+\mathbf{b}X(s) \tag{7.48}$$

等式(7.48)两边左乘$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$,得

$$\mathbf{Q}(s)=(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{q}(0)+(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}X(s) \tag{7.49}$$

再将式(7.49)代入式(7.47a),得到

$$Y(s)=\mathbf{c}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{q}(0)+[c(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}+d]X(s) \tag{7.50}$$

对上式做拉普拉斯反变换即得输出$y(t)$。式(7.50)中第一项$\mathbf{c}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{q}(0)$对应零输入响应,第二项对应零状态响应。

B. 系统函数 $H(s)$

同离散时间系统一样,连续时间线性时不变系统零状态时的系统函数定义为,零状态条件下,$H(s)=Y(s)/X(s)$。令式(7.50)中$\mathbf{q}[0]=0$得

$$Y(s)=[\mathbf{c}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}+d]X(s) \tag{7.51}$$

于是

$$H(s)=\mathbf{c}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}+d \tag{7.52}$$

C. 时域求解

仿照

$$e^{at}=1+at+\frac{a^2}{2!}t^2+\cdots+\frac{a^k}{k!}t^k+\cdots$$

定义

$$e^{\mathbf{A}t}=\mathbf{I}+\mathbf{A}t+\frac{\mathbf{A}^2}{2!}t^2+\cdots+\frac{\mathbf{A}^k}{k!}t^k+\cdots \tag{7.53}$$

式中$k!=k(k-1)\cdots2\cdot1$。如果$t=0$,则式(7.53)简化为

$$e^{\mathbf{0}}=\mathbf{I} \tag{7.54}$$

其中$\mathbf{0}$是一个$N\times N$零矩阵。因为$e^{a(t-\tau)}=e^{at}e^{-a\tau}=e^{-a\tau}e^{at}$,故

$$e^{\mathbf{A}(t-\tau)}=e^{\mathbf{A}t}e^{-\mathbf{A}\tau}=e^{-\mathbf{A}\tau}e^{\mathbf{A}t} \tag{7.55}$$

令式(7.55)中$\tau=t$,有

$$e^{\mathbf{A}t}e^{-\mathbf{A}t}=e^{-\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}t}=e^{\mathbf{0}}=\mathbf{I} \tag{7.56}$$

于是

$$e^{-\mathbf{A}t}=(e^{\mathbf{A}t})^{-1} \tag{7.57}$$

上式表明$e^{-\mathbf{A}t}$是$e^{\mathbf{A}t}$的逆矩阵。

式(7.53)两边分别对t求导数,得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t}&=\mathbf{0}+\mathbf{A}+\frac{\mathbf{A}^2}{2!}2t+\cdots+\frac{\mathbf{A}^k}{k!}kt^{k-1}+\cdots\\&=\mathbf{A}\left[\mathbf{I}+\mathbf{A}t+\frac{\mathbf{A}^2}{2!}t^2+\cdots\right]\\&=\left[\mathbf{I}+\mathbf{A}t+\frac{\mathbf{A}^2}{2!}t^2+\cdots\right]\mathbf{A}\end{aligned}$$

从中可以看出

$$\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t}=\mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A} \tag{7.58}$$

利用关系式[附录A,式(A.70)]

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{AB})=\frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{B}+\mathbf{A}\frac{d\mathbf{B}}{dt}$$

以及式(7.58),有

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{q}(t)]&=\left[\frac{d}{dt}e^{-\mathbf{A}t}\right]\mathbf{q}(t)+e^{-\mathbf{A}t}\dot{\mathbf{q}}(t)\\&=-e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{A}\mathbf{q}(t)+e^{-\mathbf{A}t}\dot{\mathbf{q}}(t)\end{aligned} \tag{7.59}$$

式(7.46a)两边左乘上$e^{-\mathbf{A}t}$,可得

$$e^{-\mathbf{A}t}\dot{\mathbf{q}}(t) = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{A}\mathbf{q}(t) + e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{b}x(t)$$

或
$$e^{-\mathbf{A}t}\dot{\mathbf{q}}(t) - e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{A}\mathbf{q}(t) = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{b}x(t) \tag{7.60}$$

根据式(7.59),式(7.60)可以改写为

$$\frac{d}{dt}[e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{q}(t)] = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{b}x(t) \tag{7.61}$$

对式(7.61)两边从 0 到 t 积分,可得

$$e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{q}(t)\Big|_0^t = \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{b}x(\tau)d\tau$$

或
$$e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}(0) = \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{b}x(\tau)d\tau$$

故
$$e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(0) + \int_0^t e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{b}x(\tau)d\tau \tag{7.62}$$

在式(7.62)两边左乘 $e^{\mathbf{A}t}$,并利用式(7.55)和(7.56),得

$$\mathbf{q}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{q}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{b}x(\tau)d\tau \tag{7.63}$$

若已知初始状态 $\mathbf{q}(t_0)$和 $t \geqslant t_0$ 时的 $x(t)$,则由式(7.61)两边从 t_0 到 t 积分可得

$$\mathbf{q}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{q}(t_0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{b}x(\tau)d\tau \tag{7.64}$$

矩阵函数 $e^{\mathbf{A}t}$就是连续时间系统的状态转移矩阵。将式(7.63)代入式(7.46b)得到

$$y(t) = \mathbf{c}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{q}(0) + \int_0^t \mathbf{c}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{b}x(\tau)d\tau + dx(t) \tag{7.65}$$

D. 求 $e^{\mathbf{A}t}$的值

方法 1:

和求 $\mathbf{A}^n$ 的值一样,由 Cayley-Hamilton 定理,有

$$e^{\mathbf{A}t} = b_0\mathbf{I} + b_1\mathbf{A} + \cdots + b_{N-1}\mathbf{A}^{N-1} \tag{7.66}$$

当 $\mathbf{A}$ 的特征根 λ_k 为单根时,系数 $b_0, b_1, \cdots, b_{N-1}$可由下式条件求得

$$b_0 + b_1\lambda_k + \cdots + b_{N-1}\lambda_k^{N-1} = e^{\lambda_k t} \qquad k = 0, 1, \cdots, N \tag{7.67}$$

对重特征根的情况,见习题 7.45。

方法 2:

化对角阵法,即通过将 A 化为对角阵来求$e^{\mathbf{A}t}$。

当 $\mathbf{A}$ 的特征根 λ_k 为单根时,有

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_N t} \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1} \tag{7.68}$$

其中 $\mathbf{P}$ 由式(7.30)给出。

方法 3:

矩阵谱分解法,即求出满足式(7.69)的结构(constituent)矩阵 $\mathbf{E}_k (k = 1, 2, \cdots, N)$。

$$\mathbf{A} = \lambda_1\mathbf{E}_1 + \lambda_2\mathbf{E}_2 + \cdots + \lambda_N\mathbf{E}_N \tag{7.69}$$

其中 $\lambda_k (k = 1, 2, \cdots, N)$是 $\mathbf{A}$ 的单特征根。当 $\mathbf{A}$ 的特征根 $\lambda_k (k = 1, 2, \cdots, N)$为单根时,有

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{\lambda_1 t}\mathbf{E}_1 + e^{\lambda_2 t}\mathbf{E}_2 + \cdots + e^{\lambda_N t}\mathbf{E}_N \tag{7.70}$$

方法 4:

用拉普拉斯变换,也可以计算 $e^{\mathbf{A}t}$。

比较式(7.63)和(7.49),可看出

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathscr{L}_I^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\} \tag{7.71}$$

E. 稳定性

由式(7.63)、(7.68)和(7.70)看出，如果系统矩阵 **A** 的所有特征根的实部为负，即

$$\mathrm{Re}\{\lambda_k\} < 0 \qquad \text{对所有 } k \tag{7.72}$$

那么就说系统是渐近稳定的。和离散时间系统一样，如果 **A** 的所有特征根为单根且满足条件(7.72)，那么系统就是 BIBO 稳定。

习 题 解 答

状态空间的表示

7.1　对图 7-1 所示离散时间 LTI 系统，选择单位延时器 1 和 2 的输出作为状态变量 $q_1[n]$和 $q_2[n]$，求该系统的状态空间表式。

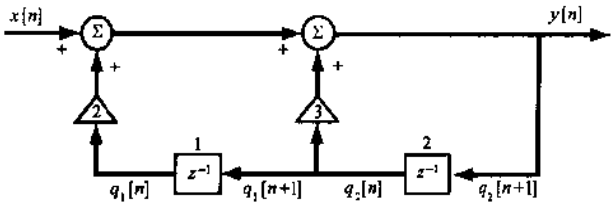


图 7-1

[redacted] 从图 7-1 可得

$$\begin{aligned} q_1[n+1] &= q_2[n] \\ q_2[n+1] &= q_1[n] + 3q_2[n] + x[n] \\ y[n] &= 2q_1[n] + 3q_2[n] + x[n] \end{aligned}$$

矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} q_1[n+1] \\ q_2[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x[n]$$

$$y[n] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1[n] \\ q[n] \end{bmatrix} + x[n] \tag{7.73a}$$

或

$$\begin{aligned} \mathbf{q}[n+1] &= \mathbf{A}\mathbf{q}[n] + \mathbf{b}x[n] \\ y[n] &= \mathbf{c}\mathbf{q}[n] + dx[n] \end{aligned} \tag{7.73b}$$

式中

$$\mathbf{q}[n] = \begin{bmatrix} q_1[n] \\ q_2[n] \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \quad d = 1$$

7.2　重做习题 7.1，选择单位延时器 2 和 1 的输出作为状态变量 $v_1[n]$和 $v_2[n]$，证明式(7.10a)和(7.10b)的关系成立。

[redacted] 采用新的状态变量重画图 7-1，如图 7-2 所示。由图 7-2 可得

$$v_1[n+1] = 3v_1[n] + 2v_2[n] + x[n]$$

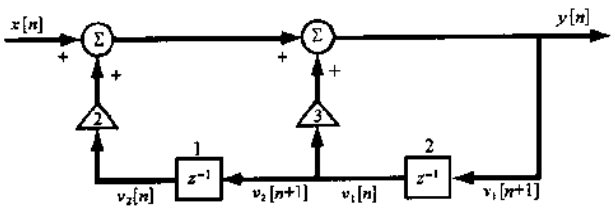


图 7-2

$$v_2[n+1] = v_1[n]$$

$$y[n] = 3v_1[n] + 2v_2[n] + x[n]$$

矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} v_1[n+1] \\ v_2[n+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1[n] \\ v_2[n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x[n]$$

$$y[n] = [3 \quad 2] \begin{bmatrix} v_1[n] \\ v_2[n] \end{bmatrix} + x[n] \tag{7.74a}$$

或

$$\mathbf{v}[n+1] = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{v}[n] + \hat{\mathbf{b}}x[n]$$

$$y[n] = \hat{\mathbf{c}}\mathbf{v}[n] + \hat{d}x[n] \tag{7.74b}$$

式中

$$\mathbf{v}[n] = \begin{bmatrix} v_1[n] \\ v_2[n] \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{c}} = [3 \quad 2] \quad \hat{d} = 1$$

由于 $v_1[n] = q_2[n]$ 和 $v_2[n] = q_1[n]$，故有

$$\mathbf{v}[n] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q}[n] = \mathbf{T}\mathbf{q}[n]$$

利用习题 7.1 的结果，可得

$$\mathbf{TAT}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{A}}$$

$$\mathbf{Tb} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{b}}$$

$$\mathbf{cT}^{-1} = [2 \quad 3] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [3 \quad 2] = \hat{\mathbf{c}} \quad d = 1 = \hat{d}$$

7.3 写出图 7-3 所示连续时间 LTI 系统的状态空间表式。

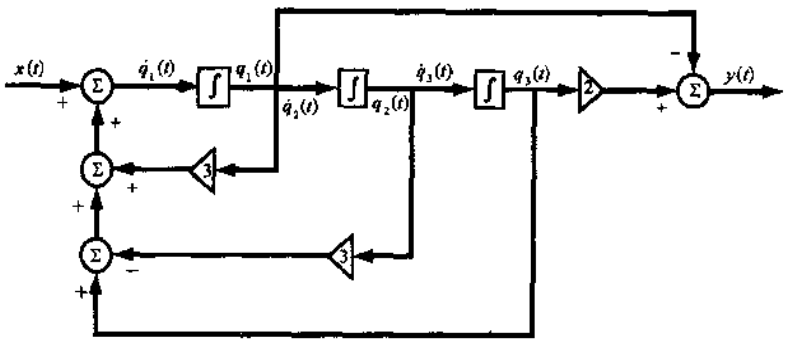


图 7-3

选择积分器的输出作为状态变量 $q_1(t)$、$q_2(t)$ 和 $q_3(t)$，如图 7-3 所示。由图 7-3 可得

$$\dot{q}_1(t) = 2q_1(t) - 3q_2(t) + q_3(t) + x(t)$$

$$\dot{q}_2(t) = q_1(t)$$

$$\dot{q}_3(t) = q_2(t)$$

$$y(t) = -q_1(t) + 2q_3(t)$$

矩阵形式为

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q}(0) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x(t) \tag{7.75}$$

$$y(t) = [-1 \quad 0 \quad 2]\mathbf{q}(t)$$

7.4 如图 7-4 所示的机械系统，它由一个质量为 m 的木块通过弹簧与墙相连而成，k_1 为弹性系数，k_2 为摩擦系数。设输出 $y(t)$ 为木块的位移，输入 $x(t)$ 为作用力。写出系统的状态空间表示式。

解 由牛顿定律有

$$m\ddot{y}(t) = -k_1 y(t) - k_2 \dot{y}(t) + x(t)$$

或

$$m\ddot{y}(t) + k_2 \dot{y}(t) + k_1 y(t) = x(t)$$

物体的位置和速度决定其势能和动能，因而状态变量 $q_1(t)$ 和 $q_2(t)$ 选择如下：

$$q_1(t) = y(t)$$

$$q_2(t) = \dot{y}(t)$$

那么就有

$$\dot{q}_1(t) = q_2(t)$$

$$\dot{q}_2(t) = -\frac{k_1}{m} q_1(t) - \frac{k_2}{m} q_2(t) + \frac{1}{m} x(t)$$

$$y(t) = q_1(t)$$

矩阵形式为

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m} & -\frac{k_2}{m} \end{bmatrix} \mathbf{q}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} x(t) \tag{7.76}$$

$$y(t) = [1 \quad 0]\mathbf{q}(t)$$

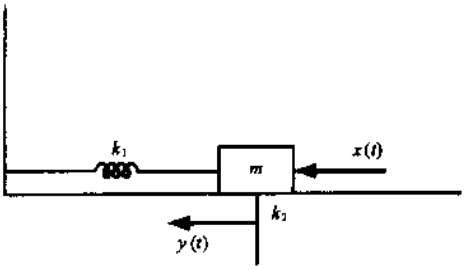


图 7-4 机械系统

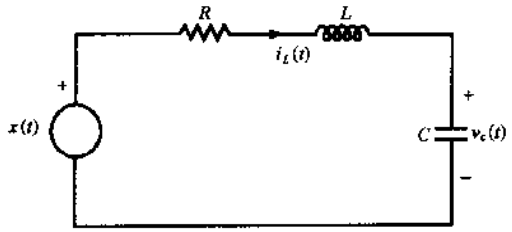


图 7-5 *RLC* 电路

7.5 如图 7-5 所示的 *RLC* 电路，设输出 $y(t)$ 为回路电流。写出电路的状态空间表示式。

解 选择状态变量 $q_1(t) = i_L(t)$ 和 $q_2(t) = v_c(t)$，由基尔霍夫定律得

$$L\dot{q}_1(t) + Rq_1(t) + q_2(t) = x(t)$$

$$C\dot{q}_2(t) = q_1(t)$$

$$y(t) = q_1(t)$$

整理成矩阵形式为

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q}(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} x(t) \tag{7.77}$$

$$y(t) = [1 \quad 0]\mathbf{q}(t)$$

7.6 写出图 7-6 所示电路的状态空间表示。设输出为流过 R_1 和 R_2 的电流。

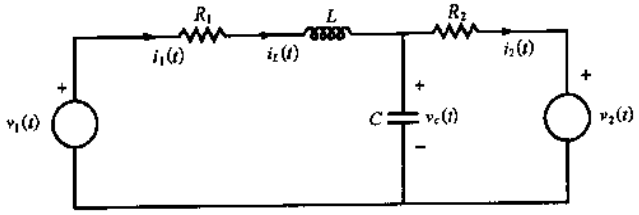


图 7-6

解 选择状态变量 $q_1(t) = i_L(t)$ 和 $q_2(t) = v_c(t)$。有两个电压源，分别设为 $x_1(t) = v_1(t)$ 和 $x_2(t) = v_2(t)$，令 $y_1(t) = i_1(t)$，$y_2(t) = i_2(t)$。对每个回路应用基尔霍夫定律，可得

$$L\dot{q}_1(t) + R_1 q_1(t) + q_2(t) = x_1(t)$$

$$q_2(t) + [q_1(t) - C\dot{q}_2(t)]R_2 = x_2(t)$$

$$y_1(t) = q_1(t)$$

$$y_2(t) = \frac{1}{R_2}[q_2(t) - x_2(t)]$$

整理成矩阵形式得

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{R_2C} \end{bmatrix}\mathbf{q}(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2C} \end{bmatrix}\mathbf{x}(t) \tag{7.78}$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix}\mathbf{q}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2} \end{bmatrix}\mathbf{x}(t)$$

其中 $\mathbf{q}(t)=\begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix}$　$\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$　$\mathbf{y}(t)=\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$

用差分方程描述的离散时间线性时不变系统的状态方程

7.7 写出离散时间系统

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] \tag{7.79}$$

的状态方程。

[redacted] 选择状态变量$q_1[n]$、$q_2[n]$为

$$q_1[n]=y[n-2]$$

$$q_2[n]=y[n-1] \tag{7.80}$$

由式(7.79)和(7.80)，可得

$$q_1[n+1]=q_2[n]$$

$$q_2[n+1]=-\frac{1}{8}q_1[n]+\frac{3}{4}q_2[n]+x[n]$$

$$y[n]=-\frac{1}{8}q_1[n]+\frac{3}{4}q_2[n]+x[n]$$

矩阵形式为

$$\mathbf{q}[n+1]=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}\mathbf{q}[n]+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}x[n]$$

$$y[n]=\begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}\mathbf{q}[n]+x[n] \tag{7.81}$$

7.8 已知一离散时间系统描述为

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] + \frac{1}{2}x[n-1] \tag{7.82}$$

写出其状态方程。

[redacted] 因为在式(7.82)右边有$\frac{1}{2}x[n-1]$项，选择$y[n-1]$和$y[n-2]$为状态变量间不能得出满足系统的状态方程。为了找出合适的状态变量，我们用单位延时器、放大器和加法器画出式(7.82)的模拟框图。对式(7.82)两边作z变换，得(注：z^{-k}对应k个单位延时)

$$Y(z) = \frac{3}{4}z^{-1}Y(z) - \frac{1}{8}z^{-2}Y(z) + X(z) + \frac{1}{2}z^{-1}X(z)$$

由此可画出图7-7所示的模拟框图。选择单位延时器的输出作为状态变量，可得

$$y[n]=q_1[n]+x[n]$$

$$q_1[n+1]=q_2[n]+\frac{3}{4}y[n]+\frac{1}{2}x[n]$$

$$=\frac{3}{4}q_1[n]+q_2[n]+\frac{5}{4}x[n]$$

$$q_2[n]=-\frac{1}{8}y[n]=-\frac{1}{8}q_1[n]-\frac{1}{8}x[n]$$

矩阵形式为

$$\mathbf{q}[n+1]=\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & 1\\ -\frac{1}{8} & 0\end{bmatrix}\mathbf{q}[n]+\begin{bmatrix}\frac{5}{4}\\ -\frac{1}{8}\end{bmatrix}x[n] \tag{7.83}$$

$$y[n]=[1\quad 0]\mathbf{q}[n]+x[n]$$

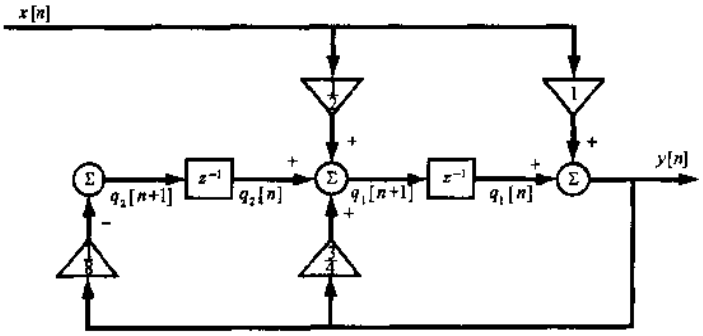


图 7-7

7.9 一离散时间线性时不变系统的系统函数为

$$H(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}} \tag{7.84}$$

求该系统状态方程。

解 从系统函数的定义[式(4.41)]知

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}$$

由此可得

$$(1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2})Y(z)=(b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2})X(z)$$

整理上式得

$$Y(z)=-a_1z^{-1}Y(z)-a_2z^{-2}Y(z)+b_0X(z)+b_1z^{-1}X(z)+b_2z^{-2}X(z)$$

由此可画出图 7-8 所示的模拟框图。选择单位延迟器的输出作为状态变量,得

$$\begin{aligned}y[n]&=q_1[n]+b_0x[n]\\ q_1[n+1]&=-a_1y[n]+q_2[n]+b_1x[n]\\ &=-a_1q_1[n]+q_2[n]+(b_1-a_1b_0)x[n]\\ q_2[n+1]&=-a_2y[n]+b_2x[n]\\ &=-a_2q_1[n]+(b_2-a_2b_0)x[n]\end{aligned}$$

矩阵形式为

$$\mathbf{q}[n+1]=\begin{bmatrix}-a_1 & 1\\ -a_2 & 0\end{bmatrix}\mathbf{q}[n]+\begin{bmatrix}b_1-a_1b_0\\ b_2-a_2b_0\end{bmatrix}x[n] \tag{7.85}$$

$$y[n]=[1\quad 0]\mathbf{q}[n]+b_0x[n]$$

注:图 7-8 所示模拟框图中延时器的个数为 2,是所需最少延时器数量。图 7-8 称作第一种规范型模拟

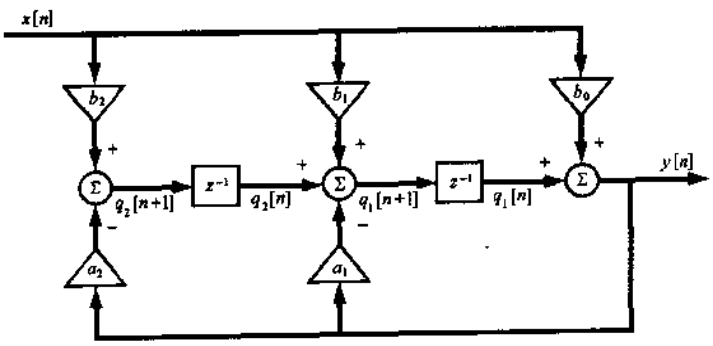


图 7-8 第一种规范型模拟框图

框图，式(7.85)称作第一种规范型状态方程。

7.10 设 $H(z)=H_1(z)H_2(z)$，重做习题 7.9。

其中 $H_1(z)=\dfrac{1}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}$，$H(z)=b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}$

[redacted] 设

$$H_1(z)=\frac{W(z)}{X(z)}=\frac{1}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}} \tag{7.86}$$

$$H_2(z)=\frac{Y(z)}{W(z)}=b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2} \tag{7.87}$$

由此可得

$$W(z)+a_1z^{-1}W(z)+a_2z^{-2}W(z)=X(z) \tag{7.88}$$

$$Y(z)=b_0W(z)+b_1z^{-1}W(z)+b_2z^{-2}W(z) \tag{7.89}$$

整理式(7.88)，得

$$W(z)=-a_1z^{-1}W(z)-a_2z^{-2}W(z)+X(z) \tag{7.90}$$

根据式(7.89)和(7.90)，画出模拟框图如图 7-9。选择单位延时器输出作为状态变量，有

$$\begin{aligned}v_1[n+1]&=v_2[n]\\ v_2[n+1]&=-a_2v_1[n]-a_1v_2[n]+x[n]\\ y[n]&=b_2v_1[n]+b_1v_2[n]+b_0v_2[n+1]\\ &=(b_2-b_0a_2)v_1[n]+(b_1-b_0a_1)v_2[n]+b_0x[n]\end{aligned}$$

矩阵形式为

$$\begin{aligned}\mathbf{v}[n+1]&=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -a_2 & -a_1\end{bmatrix}\mathbf{v}[n]+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}x[n]\\ y[n]&=[b_2-b_0a_2 \quad b_1-b_0a_1]\mathbf{v}[n]+b_0x[n]\end{aligned} \tag{7.91}$$

图 7-9 称作第二种规范型模拟框图，式(7.91)称作第二种规范型状态方程。

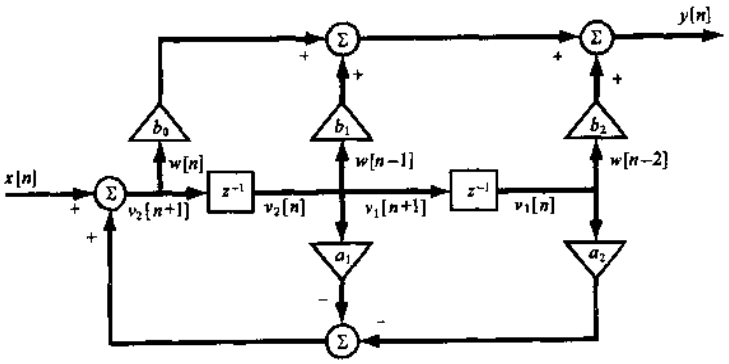


图 7-9　第二种规范型模拟框图

7.11 一离散时间线性时不变系统的系统函数为

$$H(z)=\frac{z}{2z^2-3z+1} \tag{7.92}$$

写出系统的状态空间表达式。

[redacted] 将 $H(z)$改写为

$$H(z)=\frac{z}{2z^2\left(1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}\right)}=\frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}} \tag{7.93}$$

比较式(7.93)与习题 7.9 中的式(7.84)，有

$$a_1=-\frac{3}{2}\quad a_2=\frac{1}{2}\quad b_0=0\quad b_1=\frac{1}{2}\quad b_2=0$$

将这些值代入习题 7.9 中的式(7.85)，可得

$$\mathbf{q}[n+1]=\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & 1\\ -\frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}\mathbf{q}[n]+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ 0\end{bmatrix}x[n]$$

$$y[n]=[1\quad 0]\mathbf{q}[n] \tag{7.94}$$

7.12 一离散时间线性时不变系统的系统函数为

$$H(z)=\frac{z}{2z^2-3z+1}=\frac{z}{2(z-1)\left(z-\frac{1}{2}\right)} \tag{7.95}$$

写出系统的状态空间表达式，使系统矩阵 **A** 为对角形矩阵。

解 首先把系统函数分成两部分：

$$H(z)=\frac{z}{2(z-1)\left(z-\frac{1}{2}\right)}=\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}=H_1(z)+H_2(z)$$

其中 $$H_1(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}\quad H_2(z)=\frac{-1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

令 $$H_k(z)=\frac{\alpha_k}{1-p_kz^{-1}}=\frac{Y_k(z)}{X(z)} \tag{7.96}$$

则 $$(1-p_kz^{-1})Y_k(z)=\alpha_kX(z)$$

或 $$Y_k(z)=p_kz^{-1}Y_k(z)+\alpha_kX(z)$$

由此得图 7-10 所示的模拟框图。从而 $H(z)=H_1(z)+H_2(z)$ 可由图 7-11 所示的两个并联系统来模拟。选择延迟器的输出作为状态变量，可得

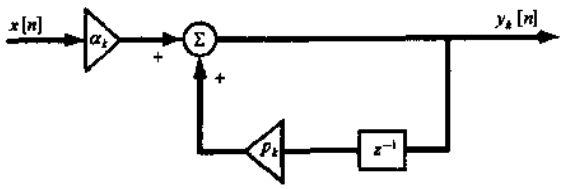


图 7-10

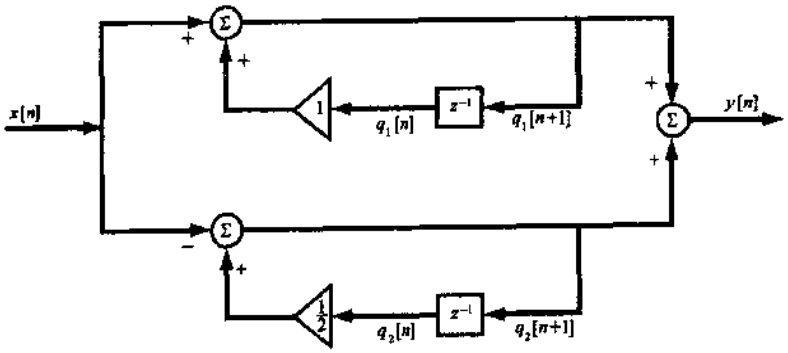


图 7-11

$$q_1[n+1]=q_1[n]+x[n]$$

$$q_2[n+1]=\frac{1}{2}q_2[n]-x[n]$$

$$y[n]=q_1[n+1]+q_2[n+1]=q_1[n]+\frac{1}{2}q_2[n]$$

矩阵形式为

$$\mathbf{q}[n+1]=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\mathbf{q}[n]+\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}x[n]$$

$$y[n]=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\mathbf{q}[n] \tag{7.97}$$

可见，系统矩阵 A 是一对角形矩阵，其对角线上元素为 $H(z)$的极点。

7.13 已知一时间离散系统的状态空间表达式为

$$\mathbf{q}[n+1]=\begin{bmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}\mathbf{q}[n]+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}x[n]$$

$$y[n]=[3 \quad -2]\mathbf{q}[n] \tag{7.98}$$

画出其模拟框图。

解 将式(7.98)重写为

$$\begin{aligned}q_1[n+1]&=q_2[n]\\ q_2[n+1]&=\frac{1}{2}q_1[n]+\frac{2}{3}q_2[n]+x[n]\\ y[n]&=3q_1[n]-2q_2[n]\end{aligned} \tag{7.99}$$

由上述方程可画出系统模拟框图，如图 7-12 所示。

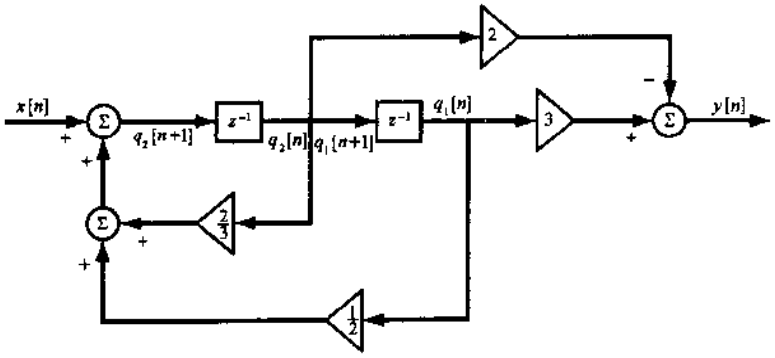


图 7-12

用微分方程描述的连续时间线性时不变系统的状态方程

7.14 已知一连续时间线性时不变系统的微分方程为

$$\ddot{y}(t)+3\dot{y}(t)+2y(t)=x(t) \tag{7.100}$$

求该系统的状态方程。

解 选择状态变量

$$\begin{aligned}q_1(t)&=y(t)\\ q_2(t)&=\dot{y}(t)\end{aligned} \tag{7.101}$$

由式(7.100)和(7.101)，可得

$$\begin{aligned}\dot{q}_1(t)&=q_2(t)\\ \dot{q}_2(t)&=-2q_1(t)-3q_2(t)+x(t)\\ y(t)&=q_1(t)\end{aligned}$$

矩阵形式为

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}}(t)&=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\mathbf{q}(t)+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}x(t)\\ y(t)&=[1 \quad 0]\mathbf{q}(t)\end{aligned} \tag{7.102}$$

7.15 已知一连续时间线性时不变系统的微分方程为

$$\ddot{y}(t)+3\dot{y}(t)+2y(t)=4\dot{x}(t)+x(t) \tag{7.103}$$

求该系统的状态方程。

解　因为在式(7.103)右边有$4\dot{x}(t)$项，所以选择 $y(t)$和 $\dot{y}(t)$为状态变量不能得出满足系统的状态方程。为了找到一个合适的状态变量，我们用积分器、放大器和加法器画出式(7.103)的模拟框图。对式(7.103)两边作拉普拉斯变换，得

$$s^2Y(s) + 3sY(s) + 2Y(s) = 4sY(s) + X(s)$$

上式两边同除 s^2，整理得

$$Y(s) = -3s^{-1}Y(s) - 2s^{-2}Y(s) + 4s^{-1}X(s) + s^{-2}X(s)$$

根据上式可画出图 7-13 所示的模拟框图。选择积分器的输出作为状态变量，可得

$$\dot{q}_1(t) = -3q_1(t) + q_2(t) + 4x(t)$$

$$\dot{q}_2(t) = -2q_1(t) + x(t)$$

$$y(t) = q_1(t)$$

矩阵形式为

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} x(t)$$

$$y(t) = [1 \quad 0]\mathbf{q}(t) \tag{7.104}$$

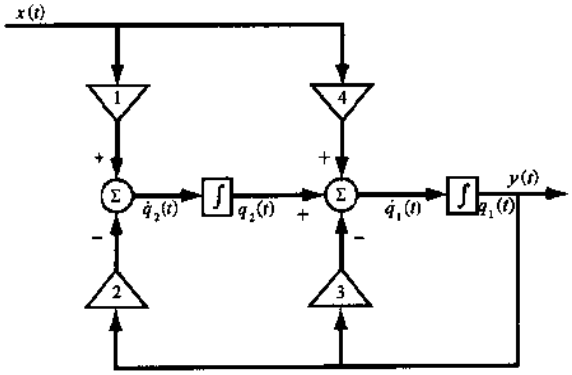


图 7-13

7.16　一连续时间线性时不变系统的系统函数为

$$H(s) = \frac{b_0s^3 + b_1s^2 + b_2s + b_3}{s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3} \tag{7.105}$$

求其状态方程。

解　由系统函数的定义[式(3.37)]

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0s^3 + b_1s^2 + b_2s + b_3}{s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3}$$

可得

$$(s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3)Y(s) = (b_0s^3 + b_1s^2 + b_2s + b_3)X(s)$$

上式两边同除 s^3，整理得

$$Y(s) = -a_1s^{-1}Y(s) - a_2s^{-2}Y(s) - a_3s^{-3}Y(s) + b_0X(s) + b_1s^{-1}X(s) + b_2s^{-2}X(s) + b_3s^{-3}X(s)$$

式中 s^{-k}对应 k 次积分，由此可画出图 7-14 所示的模拟框图。选择积分器的输出作为状态变量，可得

$$y(t) = q_1(t) + b_0x(t)$$

$$\dot{q}_1(t) = -a_1y(t) + q_2(t) + b_1x(t) = -a_1q_1(t) + q_2(t) + (b_1 - a_1b_0)x(t)$$

$$\dot{q}_2(t) = -a_2y(t) + q_3(t) + b_2x(t) = -a_2q_1(t) + q_3(t) + (b_2 - a_2b_0)x(t)$$

$$\dot{q}_3(t) = -a_3y(t) + b_3x(t) = -a_3q_1(t) + (b_3 - a_3b_0)x(t)$$

矩阵形式为

$$\dot{\mathbf{q}}(t)=\begin{bmatrix}-a_1 & 1 & 0\\ -a_2 & 0 & 1\\ -a_3 & 0 & 0\end{bmatrix}\mathbf{q}(t)+\begin{bmatrix}b_1-a_1b_0\\ b_2-a_2b_0\\ b_3-a_3b_0\end{bmatrix}x(t)$$

$$y(t)=[1\quad 0\quad 0]\mathbf{q}(t)+b_0x(t) \tag{7.106}$$

和离散时间系统一样，图 7-14 所示 $H(s)$的模拟框图是第一种规范型模拟框图，式(7.106)称作第一种规范型状态方程。

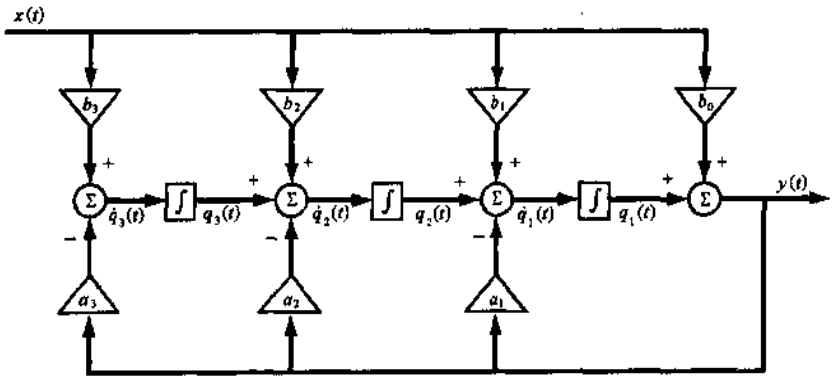


图 7-14　第一种规范型模拟框图

7.17　将 $H(s)$表示为

$$H(s)=H_1(s)H_2(s)$$

其中　$H_1(s)=\dfrac{1}{s^3+a_1s^2+a_2s+a_3}$

$$H_2(s)=b_0s^3+b_1s^2+b_2s+b$$

重做习题 7.16。

[redacted] 设

$$H_1(s)=\frac{W(s)}{X(s)}=\frac{1}{s^3+a_1s^2+a_2s+a_3}$$

$$H_2(t)=\frac{Y(s)}{W(s)}=b_0s^3+b_1s^2+b_2s+b \tag{7.107}$$

则有

$$(s^3+a_1s^2+a_2s+a_3)W(s)=X(s)$$

$$Y(s)=(b_0s^3+b_1s^2+b_2s+b)W(s)$$

整理上两式，可得



图 7-15

$$s^3W(s)=-a_1s^2W(s)-a_2sW(s)-a_3W(s)+X(s)$$

$$Y(s)=b_0s^3W(s)+b_1s^2W(s)+b_2sW(s)+b_3W(s)$$

利用上述方程和图 7-15 所示的关系，可画出图 7-16 所示的模拟框图。

选择积分器的输出作为状态变量，可得

$$\dot{v}_1(t)=v_2(t)$$

$$\dot{v}_2(t)=v_3(t)$$

$$\dot{v}_3(t)=-a_3v_1(t)-a_2v_2(t)-a_1v_3(t)+x(t)$$

$$\begin{aligned}y(t)&=b_3v_1(t)+b_2v_2(t)+b_1v_3(t)+b_0\dot{v}_3(t)\\&=(b_3-a_3b_0)v_1(t)+(b_2-a_2b_0)v_2(t)+(b_1-a_1b_0)v_3(t)+b_0x(t)\end{aligned} \tag{7.108}$$

矩阵形式为

$$\dot{\mathbf{v}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -a_3 & -a_2 & -a_1\end{bmatrix}\mathbf{v}(t)+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}x(t) \tag{7.109}$$

$$y(t)=[b_3-a_3b_0\quad b_2-a_2b_0\quad b_1-a_1b_0]\mathbf{v}(t)+b_0x(t)$$

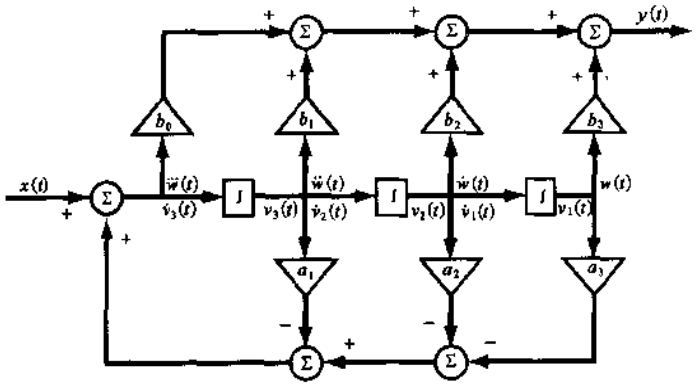


图 7-16 第二种规范型模拟框图

和离散时间系统一样，图 7-16 所示 $H(s)$的模拟框图是第二种规范型模拟框图，式(7.109)称作第二种规范型状态方程。

7.18 一连续时间线性时不变系统的系统函数为

$$H(s) = \frac{3s + 7}{(s + 1)(s + 2)(s + 5)} \tag{7.110}$$

写出系统的状态方程。

解 将 $H(s)$改写为

$$H(s) = \frac{3s + 7}{(s + 1)(s + 2)(s + 5)} = \frac{3s + 7}{s^3 + 8s^2 + 17s + 10} \tag{7.111}$$

比较式(7.111)和习题 7.16 中的式(7.105)，可看出

$$a_1 = 8 \quad a_2 = 17 \quad a_3 = 10 \quad b_0 = b_1 = 0 \quad b_2 = 3 \quad b_3 = 7$$

将这些值代入式(7.106)得

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \begin{bmatrix} -8 & 1 & 0 \\ -17 & 0 & 1 \\ -10 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{q}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} x(t) \tag{7.112}$$

$$y(t) = [1 \quad 0 \quad 0]\mathbf{q}(t)$$

7.19 一连续时间线性时不变系统的系统函数为

$$H(s) = \frac{3s + 7}{(s + 1)(s + 2)(s + 5)} \tag{7.113}$$

写出系统的状态方程，要求系统矩阵 **A** 为对角形矩阵。

解 首先把 $H(s)$写成部分分式之和的形式，即

$$H(s) = \frac{3s + 7}{(s + 1)(s + 2)(s + 5)} = \frac{1}{s + 1} - \frac{\frac{1}{3}}{s + 2} - \frac{\frac{2}{3}}{s + 5}$$
$$= H_1(s) + H_2(s) + H_3(s)$$

其中

$$H_1(s) = \frac{1}{s + 1} \quad H_2(s) = -\frac{\frac{1}{3}}{s + 2} \quad H_3(s) = -\frac{\frac{2}{3}}{s + 5}$$

令

$$H_k(s) = \frac{\alpha_k}{s - p_k} = \frac{Y_k(s)}{X(s)} \tag{7.114}$$

则

$$(s - p_k)Y_k(s) = \alpha_k X(s)$$

或

$$Y_k(s) = p_k s^{-1} Y_k(s) + \alpha_k s^{-1} X(s)$$

由此可画出系统模拟框图，如图 7-17。因此，$H(s) = H_1(s) + H_2(s) + H_3(s)$的模拟框图可由三个系统并联组成，如图 7-18。选择积分器的输出作为状态变量，可得

$$\dot{q}_1(t) = -q_1(t) + x(t)$$

$$\dot{q}_2(t) = -2q_2(t) - \frac{1}{3}x(t)$$

$$\dot{q}_3(t) = -5q_3(t) - \frac{2}{3}x(t)$$

$$y(t) = q_1(t) + q_2(t) + q_3(t)$$

矩阵形式为

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}\mathbf{q}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}x(t) \tag{7.115}$$

$$\mathbf{y}(t) = [1 \quad 1 \quad 1]\mathbf{q}(t)$$

可见，系统矩阵 A 是一个对角形矩阵，其对角线上的元素是 $H(s)$的极点。

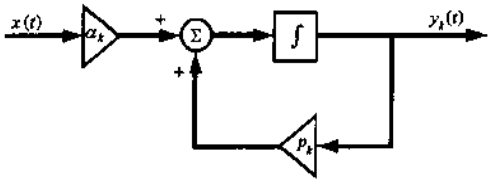


图 7-17

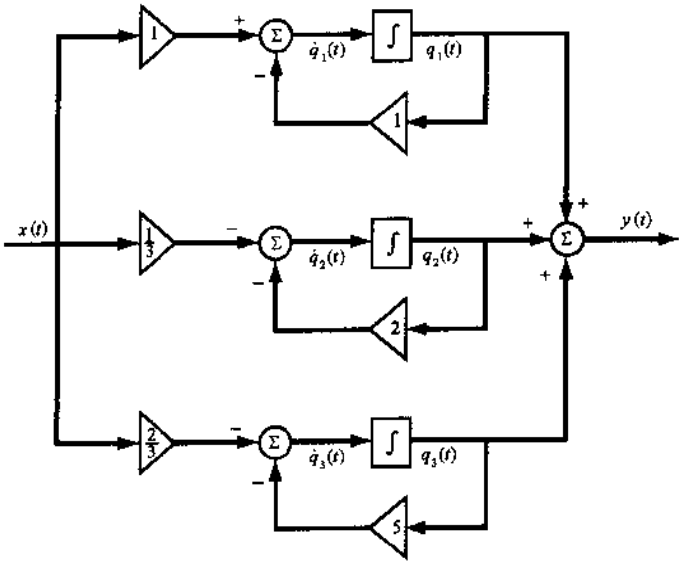


图 7-18

离散时间线性时不变系统状态方程的求解

7.20 已知矩阵 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$，用 Cayley-Hamilton 定理法求 $\mathbf{A}^n$。

解 首先求出 A 的特征多项式 $c(\lambda)$，

$$\mathbf{c}(\lambda) = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \frac{1}{8} & \lambda - \frac{3}{4} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 - \frac{3}{4}\lambda + \frac{1}{8} = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\left(\lambda - \frac{1}{4}\right)$$

再求出 A 的特征根为 $\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = \frac{1}{4}$。由式(7.27)和(7.28)得

$$\mathbf{A}^n = b_0\mathbf{I} + b_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \\ -\frac{1}{8}b_1 & b_0 + \frac{3}{4}b_1 \end{bmatrix}$$

b_0 和 b_1 是方程 $\begin{cases} b_0 + b_1\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ b_0 + b_1\left(\frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{cases}$ 的解。

由此得

$$b_0 = -\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\left(\frac{1}{4}\right)^n \qquad b_1 = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n - 4\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

故

$$\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\left(\frac{1}{4}\right)^n & 4\left(\frac{1}{2}\right)^n - 4\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n & 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{4}\right)^n \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

7.21 利用化对角阵法重做题7.20。

设 $\mathbf{x}$ 为 $\mathbf{A}$ 对特征根 λ 的特征向量，则

$$[\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{x} = 0$$

对 $\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{2}$，有

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

由 $x_1 = 2x_2$ 可求出系统的解，故 $\mathbf{A}$ 对特征根 λ_1 的特征向量为

$$\mathbf{x}_1 = \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \alpha \neq 0$$

对 $\lambda = \lambda_2 = \frac{1}{4}$，有

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

由 $x_1 = 4x_2$ 可求出系统的解，故 $\mathbf{A}$ 对特征根 λ_2 的特征向量为

$$\mathbf{x}_2 = \beta \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \beta \neq 0$$

令上式中 $\alpha = \beta = 1$，并设

$$\mathbf{P} = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2] = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

则

$$\mathbf{P}^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

根据式(7.29)可得

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}^n\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\left(\frac{1}{4}\right)^n & 4\left(\frac{1}{2}\right)^n - 4\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n & 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{4}\right)^n \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

7.22　利用矩阵的谱分解法重做题 7.20。

[redacted]　因为 A 的特征根为单根，由式(7.33)有

$$\mathbf{E}_1=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I})=\frac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}\left(\mathbf{A}-\frac{1}{4}\mathbf{I}\right)=4\begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & 1\\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 4\\ -\frac{1}{2} & 2\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_2=\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})=\frac{1}{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}\left(\mathbf{A}-\frac{1}{2}\mathbf{I}\right)=-4\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & 1\\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -4\\ \frac{1}{2} & -1\end{bmatrix}$$

再由式(7.34)，可得

$$\mathbf{A}^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\mathbf{E}_1+\left(\frac{1}{4}\right)^n\mathbf{E}_1=\left(\frac{1}{2}\right)^n\begin{bmatrix}-1 & 4\\ -\frac{1}{2} & 2\end{bmatrix}+\left(\frac{1}{4}\right)^n\begin{bmatrix}2 & -4\\ \frac{1}{2} & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-\left(\frac{1}{2}\right)^n+2\left(\frac{1}{4}\right)^n & 4\left(\frac{1}{2}\right)^n-4\left(\frac{1}{4}\right)^n\\ -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n & 2\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{4}\right)^n\end{bmatrix}$$

7.23　用 z 变换法重做题 7.20。

[redacted]　首先，求出$(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$，

$$(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\begin{bmatrix}z & -1\\ \frac{1}{8} & z-\frac{3}{4}\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}\begin{bmatrix}z-\frac{3}{4} & 1\\ -\frac{1}{8} & z\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{z-\frac{3}{4}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)} & \frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}\\ \frac{-\frac{1}{8}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)} & \frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-\frac{1}{z-\frac{1}{2}}+2\frac{1}{z-\frac{1}{4}} & 4\frac{1}{z-\frac{1}{2}}-4\frac{1}{z-\frac{1}{4}}\\ -\frac{1}{2}\frac{1}{z-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\frac{1}{z-\frac{1}{4}} & 2\frac{1}{z-\frac{1}{2}}-\frac{1}{z-\frac{1}{4}}\end{bmatrix}$$

再由式(7.35)，可得

$$\mathbf{A}^n=\mathscr{Z}_I^{-1}\{(z\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}z\}$$

$$=\mathscr{Z}_I^{-1}\begin{bmatrix}-\frac{z}{z-\frac{1}{2}}+2\frac{z}{z-\frac{1}{4}} & 4\frac{z}{z-\frac{1}{2}}-4\frac{z}{z-\frac{1}{4}}\\ -\frac{1}{2}\frac{z}{z-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\frac{z}{z-\frac{1}{4}} & 2\frac{z}{z-\frac{1}{2}}-\frac{z}{z-\frac{1}{4}}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-\left(\frac{1}{2}\right)^n+2\left(\frac{1}{4}\right)^n & 4\left(\frac{1}{2}\right)^n-4\left(\frac{1}{4}\right)^n\\ -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n & 2\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{4}\right)^n\end{bmatrix}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^n\begin{bmatrix}-1 & 4\\ -\frac{1}{2} & 2\end{bmatrix}+\left(\frac{1}{4}\right)^n\begin{bmatrix}2 & -4\\ \frac{1}{2} & -1\end{bmatrix}$$

从上面的计算结果可看出，当 A 的特征根为单根时，矩阵的谱分解法是计算 $\mathbf{A}^n$ 最有效的方法。

7.24　已知 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3}\end{bmatrix}$，求 $\mathbf{A}^n$。

解 A的特征多项式 $c(\lambda)$ 为

$$c(\lambda)=|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ \frac{1}{3} & \lambda-\frac{3}{4}\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^2-\frac{4}{3}\lambda+\frac{1}{3}=(\lambda-1)\left(\lambda-\frac{1}{3}\right)$$

由此求得A的特征根为 $\lambda_1=1,\lambda_2=\frac{1}{3}$。由式(7.33),得

$$\mathbf{E}_1=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}(\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I})=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\left(\mathbf{A}-\frac{1}{3}\mathbf{I}\right)=\frac{3}{2}\begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & 1\\ -\frac{1}{3} & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_2=\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}(\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I})=\frac{1}{\frac{1}{3}-1}(\mathbf{A}-\mathbf{I})=-\frac{3}{2}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

因此,由式(7.34)可得

$$\mathbf{A}^n=(1)^n\mathbf{E}_1+\left(\frac{1}{3}\right)^n\mathbf{E}_2=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{bmatrix}+\left(\frac{1}{3}\right)^n\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & -\frac{3}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n & \frac{3}{2}-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n\\ -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n & \frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n\end{bmatrix}$$

7.25 已知 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$,求 $\mathbf{A}^n$。

解 A的特征多项式 $c(\lambda)$ 为

$$c(\lambda)=|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1\\ 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2$$

由此可求得A的特征根为 $\lambda_1=\lambda_2=2$。利用Cayley-Hamilton定理计算 $\mathbf{A}^n$。根据式(7.27),得

$$\mathbf{A}^n=b_0\mathbf{I}+b_1\mathbf{A}=\begin{bmatrix}b_0+2b_1 & b_1\\ 0 & b_0+2b_1\end{bmatrix}$$

式中 b_0,b_1 的值由下式确定[附录A,式(A.59)和(A.60)]:

$$b_0+b_1\lambda=2^n$$

$$b_1=n\lambda^{n-1}$$

代入 $\lambda=2$,有

$$b_0+b_12=2^n$$

$$b_1=n2^{n-1}$$

可解出

$$b_0=(1-n)2^n \qquad b_1=n2^{n-1}$$

故

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2^n & n2^{n-1}\\ 0 & 2^n\end{bmatrix}$$

7.26 将习题7.25中矩阵A分解为

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\mathbf{D}+\mathbf{N}$$

其中 $\mathbf{D}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ $\mathbf{N}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

(a) 证明 $\mathbf{N}^2=\mathbf{0}$。

(b) 证明D和N可互易,即 $\mathbf{DN}=\mathbf{ND}$。

(c) 利用(a)和(b)的结果,求 $\mathbf{A}^n$。

[redacted] (a)用矩阵乘法,可证

$$\mathbf{N}^2 = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

(b)因为对角形矩阵 D 可表示为 2I,所以有

$$\mathbf{DN} = 2\mathbf{IN} = 2\mathbf{N} = 2\mathbf{NI} = \mathbf{N}(2\mathbf{I}) = \mathbf{ND}$$

即 D 和 N 可互易。

(c)由二项式展开和(b)的结果,可写出

$$(\mathbf{D}+\mathbf{N})^n = \mathbf{D}^n + n\mathbf{D}^{n-1}\mathbf{N} + \frac{n(n-1)}{2!}\mathbf{D}^{n-2}\mathbf{N}^2 + \cdots + \mathbf{N}^n$$

因为 $\mathbf{N}^2 = \mathbf{0}$,所以 $\mathbf{N}^k = \mathbf{0}$, $k \geqslant 2$。由此可得

$$\mathbf{A}^n = (\mathbf{D}+\mathbf{N})^n = \mathbf{D}^n + n\mathbf{D}^{n-1}\mathbf{N}$$

代入 D 和 N,求出 $\mathbf{A}^n$ 为[见附录 A 式(A.43)]

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^n &= \begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}^n + n\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}^{n-1}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}2^n & 0\\ 0 & 2^n\end{bmatrix} + n\begin{bmatrix}2^{n-1} & 0\\ 0 & 2^{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}2^n & 0\\ 0 & 2^n\end{bmatrix} + n\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 2^{n-1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2^n & n2^{n-1}\\ 0 & 2^n\end{bmatrix}\end{aligned}$$

这和习题 7.25 的结果一样。

7.27 A 的最小多项式 $m(\lambda)$是使 $m(\mathbf{A})=\mathbf{0}$ 的最低阶数为一的多项式。已知矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 4 & 1\end{bmatrix}$$

(a) 找出 A 的最小多项式 $m(\lambda)$。

(b) 根据(a)的结果求出 $\mathbf{A}^n$。

[redacted] (a)A 的特征多项式 $c(\lambda)$为

$$c(\lambda) = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix}\lambda-2 & 0 & 0\\ 0 & \lambda+2 & -1\\ 0 & -4 & \lambda-1\end{vmatrix} = (\lambda+3)(\lambda-2)^2$$

求出 A 的特征根为 $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$。设 $m(\lambda)$为

$$m(\lambda) = (\lambda+3)(\lambda-2) = \lambda^2 + \lambda - 6$$

计算 $m(\mathbf{A})$的值如下:

$$m(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 + \mathbf{A} - 6\mathbf{I} = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 4 & 1\end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 4 & 1\end{bmatrix} - 6\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 8 & -1\\ 0 & -4 & 5\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 4 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}6 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

因此,A 的最小多项式为

$$m(\lambda) = (\lambda+3)(\lambda-2) = \lambda^2 + \lambda - 6$$

(b)由(a)可见,即便 A 的阶数为 3, $\mathbf{A}^n$ 也可表示为 I 和 A 的线性组合。与 Cayley-Hamilton 定理的结论相似,有

$$\mathbf{A}^n = b_0\mathbf{I} + b_1\mathbf{A} = \begin{bmatrix}b_0 & b_1\\ -\frac{1}{8}b_1 & b_0 + \frac{3}{4}b_1\end{bmatrix}$$

其中 b_0, b_1 由方程 $b_0 + b_1\lambda = \lambda^n$ 确定。

代入 $\lambda = 3$ 和 $\lambda = 2$,有

$$b_0 - 3b_1 = (-3)^n$$
$$b_0 + 2b_1 = 2^n$$

解出

$$b_0 = \frac{2}{5}(-3)^n + \frac{3}{5}(2)^n \qquad b_1 = -\frac{1}{5}(-3)^n + \frac{1}{5}(2)^n$$

故

$$\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5}(-3)^n + \frac{1}{5}(2)^n & -\frac{1}{5}(-3)^n + \frac{1}{5}(2)^n \\ 0 & -\frac{4}{5}(-3)^n + \frac{4}{5}(2)^n & \frac{1}{5}(-3)^n + \frac{4}{5}(2)^n \end{bmatrix}$$
$$= (-3)^n \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} + (2)^n \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

7.28 用矩阵谱分解法计算习题7.27中矩阵A的$\mathbf{A}^n$。

解 由于A的最小多项式为

$$m(\lambda) = (\lambda + 3)(\lambda - 2) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$$

只包含简单因子,故可用谱分解法求$\mathbf{A}^n$。由式(7.33)有

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{I}) = \frac{1}{-3-2}(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})$$
$$= -\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}) = \frac{1}{2-(-3)}(\mathbf{A} + 3\mathbf{I})$$
$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

因此,由式(7.34)可得

$$\mathbf{A}^n = (-3)^n\mathbf{E}_1 + (2)^n\mathbf{E}_2$$
$$= (-3)^n \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} + (2)^n \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5}(-3)^n + \frac{1}{5}(2)^n & -\frac{1}{5}(-3)^n + \frac{1}{5}(2)^n \\ 0 & -\frac{4}{5}(-3)^n + \frac{4}{5}(2)^n & \frac{1}{5}(-3)^n + \frac{4}{5}(2)^n \end{bmatrix}$$

这一结果与习题7.27(b)结果相同。

7.29 对习题7.7中的离散时间系统,假设系统满足IR条件。

(a) 由状态空间求系统的单位阶跃响应。

(b) 求系统函数$H(z)$。

解 由习题7.7的结果,状态方程为

$$q[n+1] = \mathbf{A}\mathbf{q}[n] + \mathbf{b}x[n]$$

$$y[n] = \mathbf{cq}[n] + dx[n]$$

式中 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$　$\mathbf{b}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$　$\mathbf{c}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$　$d=1$

设式(7.25)中 $\mathbf{q}[0]=\mathbf{0}, x[n]=u[n]$，则单位阶跃响应 $s[n]$ 为

$$s[n] = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{cA}^{n-1-k}\mathbf{b}u[k] + du[n] \tag{7.116}$$

由习题(7.20)，有

$$\mathbf{A}^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

且

$$\mathbf{cA}^{n-1-k}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-k} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1-k} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-k} \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$+ \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1-k} \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-k} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1-k} = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k}$$

故可得

$$s[n] = \sum_{k=0}^{n-1} \left[2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} \right] + 1$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{n-1} 2^k - \left(\frac{1}{4}\right)^n \sum_{k=0}^{n-1} 4^k + 1$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1-2^n}{1-2}\right) - \left(\frac{1}{4}\right)^n \left(\frac{1-4^n}{1-4}\right) + 1$$

$$= -2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{1}{3} + 1$$

$$= \frac{8}{3} - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n \qquad n \geqslant 0$$

这一结果与习题 4.32(c)结果相同。

(b)根据式(7.44)，系统函数 $H(z)$ 为

$$H(z) = \mathbf{c}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} + d$$

而

$$(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} z & -1 \\ \frac{1}{8} & z - \frac{3}{4} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)} \begin{bmatrix} z - \frac{3}{4} & 1 \\ -\frac{1}{8} & z \end{bmatrix}$$

从而有

$$H(z) = \frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)} \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z - \frac{3}{4} & 1 \\ -\frac{1}{8} & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1$$

$$= \frac{-\frac{1}{8} + \frac{3}{4}z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)} + 1 = \frac{z^2}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{4}\right)}$$

这一结果与习题 4.32(a)结果相同。

7.30 一离散时间线性时不变系统状态空间描述为

$$\mathbf{q}[n+1] = \mathbf{Aq}[n] + \mathbf{b}x[n]$$

$$y[n] = \mathbf{cq}[n] + dx[n]$$

(a)证明系统的单位脉冲响应为

$$h[n]=\begin{cases} d & n=0 \\ \mathbf{cA}^{n-1}\mathbf{b} & n>0 \\ 0 & n<0 \end{cases} \tag{7.117}$$

(b)利用式(7.117)求习题7.29中系统的单位脉冲响应 $h[n]$。

(a)设式(7.25)中 $\mathbf{q}[n]=\mathbf{0}$, $x[k]=\delta[k]$, $x[n]=\delta[n]$, 可得

$$h[n]=\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{cA}^{n-1-k}\mathbf{b}\delta[k]+d\delta[n] \tag{7.118}$$

注意 式(7.118)中求和项不存在 $n=0$ 项, 第一项为 $\mathbf{cA}^{n-1}\mathbf{b}$, $n>0$。右边第二项当 $n=0$ 时等于 d, $n\neq 0$ 时等于0, 由此可得出

$$h[n]=\begin{cases} d & n=0 \\ \mathbf{cA}^{n-1}\mathbf{b} & n>0 \\ 0 & n<0 \end{cases}$$

(b)由习题7.29的结果有

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \quad d=1$$

$$\mathbf{cA}^{n-1}\mathbf{b}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \qquad n\geqslant 1$$

根据式(7.117), 求出 $h[n]$ 为

$$h[n]=\begin{cases} 1 & n=0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{4}\right)^{n} & n\geqslant 1 \\ 0 & n<0 \end{cases}$$

这一结果与习题4.32(b)结果相同。

7.31 用状态空间法求题4.38(b)差分方程的解。

$$3y[n]-4y[n-1]+y[n-2]=x[n] \tag{7.119}$$

已知 $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]$, $y[-1]=1$, $y[-2]-2$。

将式(7.119)改写为

$$y[n]-\frac{4}{3}y[n-1]+\frac{1}{3}y[n-2]=\frac{1}{3}x[n]$$

设 $q_1[n]=y[n-2]$, $q_2[n]=y[n-1]$, 可写出系统的状态方程为

$$q_1[n+1]=q_2[n]$$

$$q_2[n+1]=-\frac{1}{3}q_1[n]+\frac{4}{3}q_2[n]+\frac{1}{3}x[n]$$

$$y[n]=-\frac{1}{3}q_1[n]+\frac{4}{3}q_2[n]+\frac{1}{3}x[n]$$

矩阵形式为

$$\mathbf{q}[n+1]=\mathbf{Aq}[n]+\mathbf{b}x[n]$$
$$y[n]=\mathbf{cq}[n]+dx[n]$$

式中

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \quad d=\frac{1}{3}$$

$$\mathbf{q}[0]=\begin{bmatrix} q_1[0] \\ q_2[0] \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y[-2] \\ y[-1] \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

根据式(7.25), 可写出

$$y[n]=\mathbf{cA}^{n}\mathbf{q}[0]+\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{cA}^{n-1-k}\mathbf{b}x[k]+dx[n] \qquad n>0$$

由习题 7.24 的结果有

$$\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{3}\right)^n \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{cA}^n\mathbf{q}[0] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{3}\right)^n \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\mathbf{cA}^{n-1-k}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1-k} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{18}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1-k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1-k}$$

因而

$$y[n] = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1-k}\right]\left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{3}{2}\right)^k + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2}\left[\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right] - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\left[\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^n}{1-\frac{3}{2}}\right] + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n \quad n > 0$$

这一结果与习题 4.38(b)所得结果相同。

7.32 已知一离散时间线性时不变系统如图 7-19 所示，

(a) 判断系统是否渐近稳定？

(b) 求系统函数 $H(z)$。

(c) 判断系统是否 BIBO 稳定？

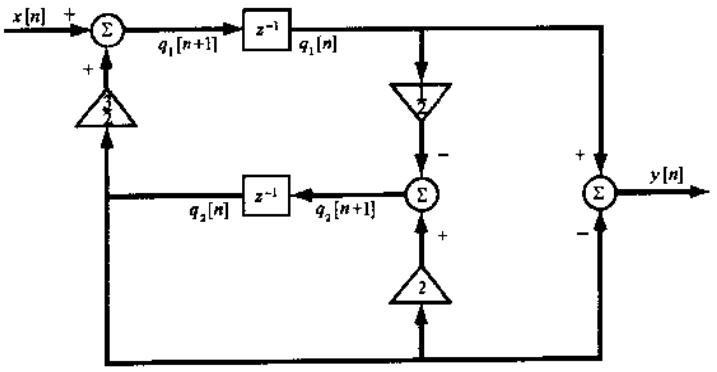


图 7-19

(a)选择 $q_1[n]$和 $q_2[n]$作为状态变量，如图 7-19 所示，由此可得

$$q_1[n+1] = \frac{3}{2}q_2[n] + x[n]$$

$$q_2[n+1] = -\frac{1}{2}q_1[n] + 2q_2[n]$$

$$y[n] = q_1[n] - q_2[n]$$

矩阵形式为

$$\mathbf{q}[n+1] = \mathbf{A}\mathbf{q}[n] + \mathbf{b}x[n]$$
$$y[n] = \mathbf{c}\mathbf{q}[n]$$

其中 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$ $\mathbf{b}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\mathbf{c}=[1 \quad -1]$

写出特征多项式 $c(\lambda)$为

$$c(\lambda) = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-2) + \frac{3}{4} = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\left(\lambda - \frac{3}{2}\right)$$

由此求出系统矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征根为 $\lambda_1 = \frac{1}{2}$和 $\lambda_2 = \frac{3}{2}$。因为$|\lambda_2| > 1$,所以系统不是渐近稳定的。

(b) 由式(7.44)知系统函数 $H(z)$为

$$H(z) = \mathbf{c}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = [1 \quad -1]\begin{bmatrix} z & -\frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & z-2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{3}{2}\right)}[1 \quad -1]\begin{bmatrix} z-2 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{z-\frac{3}{2}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{3}{2}\right)} = \frac{1}{z-\frac{1}{2}}$$

(c)$H(z)$中 $z=\frac{3}{2}$点的零根点相消,所以 $H(z)$只有 $z=\frac{1}{2}$一个根点。该极点在 z 平面的单位圆内,因此系统是BIBO稳定。

注意,该系统虽是BIBO稳定,但若系统不满足IR条件,则系统不稳定。

7.33 一 N 阶离散时间线性时不变系统的状态方程为

$$\mathbf{q}[n+1] = \mathbf{A}\mathbf{q}[n] + \mathbf{b}x[n]$$

如果能用 N 个输入样本$x[n_0], x[n_0+1], \cdots, x[n_0+N-1]$控制系统由状态 $\mathbf{q}[n_0] = \mathbf{q}_0$ 变换到状态 $\mathbf{q}[n_0+N] = \mathbf{q}_1$($\mathbf{q}_0$ 与 $\mathbf{q}_1$ 是任意有限状态),那么就称系统是可控的。证明:如果可控矩阵

$$\mathbf{M}_c = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{N-1}\mathbf{b}] \tag{7.120}$$

的秩为 N,则该系统是可控的。

证明 假设 $n_0 = 0, \mathbf{q}[0] = \mathbf{0}$。根据式(7.23)有

$$\mathbf{q}[N] = \sum_{k=0}^{N-1}\mathbf{A}^{N-1-k}\mathbf{b}x[k] \tag{7.121}$$

上式可写为

$$\mathbf{q}[N] = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{N-1}\mathbf{b}]\begin{bmatrix} x[N-1] \\ x[N-2] \\ \vdots \\ x[0] \end{bmatrix} \tag{7.122}$$

这样,如果 $\mathbf{q}[N]$是任意的 N 维向量并有非零输入序列,要满足可控性,式(7.122)的系数矩阵必须是满秩的,即矩阵

$$\mathbf{M}_c = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{N-1}\mathbf{b}]$$

的秩为 N。

7.34 一 N 阶离散时间线性时不变系统的状态方程为

$$\mathbf{q}[n+1] = \mathbf{A}\mathbf{q}[n] + \mathbf{b}x[n]$$

$$y[n] = \mathbf{cq}[n]$$

如果从任意时刻 n_0 开始，由输出序列 $y[n_0], y[n_0+1], \cdots, y[n_0+N-1]$ 能够确定系统初始状态 $\mathbf{q}[n_0]=\mathbf{q}_0$，那么就称系统是可测的。证明：如果可测矩阵

$$\mathbf{M}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{cA} \\ \vdots \\ \mathbf{cA}^{N-1} \end{bmatrix} \tag{7.123}$$

的秩为 N，那么该系统是可测系统。

假设 $n_0=0$ 和 $x[n]=0$。根据式(7.25)，可得输出 $y[n]$ 为

$$y[n] = \mathbf{cA}^n\mathbf{q}[0] \qquad n = 0, 1, \cdots, N-1 \tag{7.124}$$

或写成

$$\begin{aligned} y[0] &= \mathbf{cq}[0] \\ y[1] &= \mathbf{cAq}[0] \\ &\vdots \\ y[N-1] &= \mathbf{cA}^{N-1}\mathbf{q}[0] \end{aligned} \tag{7.125}$$

把式(7.125)写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \\ \vdots \\ y[N-1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{cA} \\ \vdots \\ \mathbf{cA}^{N-1} \end{bmatrix} \mathbf{q}[0] \tag{7.126}$$

由此，要求出 $\mathbf{q}[0]$ 的单值解，式(7.126)的系数矩阵必须是满秩的，即矩阵

$$\mathbf{M}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{cA} \\ \vdots \\ \mathbf{cA}^{N-1} \end{bmatrix}$$

的秩为 N。

7.35 讨论习题 7.7 所述系统。

(a) 判断该系统是否可控?

(b) 判断该系统是否可测?

(c) 求系统函数 $H(z)$。

(a)由习题 7.7 的结果，可得

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \quad d = 1$$

$$\mathbf{Ab} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

由式(7.120)得可控矩阵为

$$\mathbf{M}_c = [\mathbf{b} \quad \mathbf{Ab}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

且 $|\mathbf{M}_c| = -1 \neq 0$。因为 $\mathbf{M}_c$ 的秩为 2，所以系统是可控的。

(b)类似地，

$$\mathbf{cA} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{32} & \frac{7}{16} \end{bmatrix}$$

由式(7.123)，得可测矩阵为

$$\mathbf{M}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{cA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{32} & \frac{7}{16} \end{bmatrix}$$

且$|\mathbf{M}_o| = -\frac{1}{64} \neq 0$。因为$\mathbf{M}_o$的秩为2,所以系统是可测的。

(c)由式(7.44),可得系统函数$H(z)$为

$$H(z) = \mathbf{c}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} + d = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & -1 \\ \frac{1}{8} & z - \frac{3}{4} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1$$

$$= \frac{1}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{4}\right)} \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z - \frac{3}{4} & 1 \\ -\frac{1}{8} & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1$$

$$= \frac{\frac{3}{4}z - \frac{1}{8}}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{4}\right)} + 1 = \frac{z^2}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{4}\right)}$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}$$

7.36 对于习题7.7所述系统,设

$$\mathbf{q}[0] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

求使得$\mathbf{q}[2] = 0$的$x[0]$和$x[1]$值。

解 由式(7.23),可得

$$\mathbf{q}[2] = \mathbf{A}^2\mathbf{q}[0] + \mathbf{A}\mathbf{b}x[0] + \mathbf{b}x[1] = \mathbf{A}^2\mathbf{q}[0] + [\mathbf{b} \quad \mathbf{Ab}] \begin{bmatrix} x[1] \\ x[0] \end{bmatrix}$$

因此

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x[1] \\ x[0] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{7}{16} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] + \frac{3}{4}x[0] \end{bmatrix}$$

由此可得

$$x[0] = -\frac{3}{4}, x[1] = \frac{1}{8}$$

7.37 对于习题7.7所述系统,当$x[0] = x[1] = 0$时观测到$y[0] = 1, y[1] = 0$,求系统的初始状态$\mathbf{q}[0]$。

解 由式(7.125)得

$$\begin{bmatrix} y[0] \\ y[1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{cA} \end{bmatrix} \mathbf{q}[0]$$

因此

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{32} & \frac{7}{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1[0] \\ q_2[0] \end{bmatrix}$$

解得

$$\mathbf{q}[0] = \begin{bmatrix} q_1[0] \\ q_2[0] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{32} & \frac{7}{16} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ 6 \end{bmatrix}$$

7.38 讨论习题 7.32 所述系统。

(a) 判断该系统是否可控。

(b) 判断该系统是否可测。

解 (a)由习题 7.32 结果,有

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & \frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2} & 2\end{bmatrix}\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\quad \mathbf{c}=\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}$$

求出

$$\mathbf{Ab}=\begin{bmatrix}0 & \frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2} & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

根据式(7.120),可控矩阵为

$$\mathbf{M}_c=[\mathbf{b}\quad \mathbf{Ab}]=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

且$|\mathbf{M}_c|=-\frac{1}{2}\neq 0$。因为 $\mathbf{M}_c$ 的秩为 2,所以系统是可控的。

(b)类似地,

$$\mathbf{cA}=\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2} & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

根据式(7.123),可测矩阵为

$$\mathbf{M}_o=\begin{bmatrix}\mathbf{c}\\ \mathbf{cA}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

且$|\mathbf{M}_o|=0$。因为 $\mathbf{M}_o$ 的秩小于 2,所以系统是不可测的。

注意,从习题 7.32(b)知系统函数 $H(z)$有零极点相消。如果系统函数有零极点相消,那么系统不可能既可控又可测。

连续时间线性时不变系统状态方程的解

7.39 已知

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -6 & -5\end{bmatrix}$$

用 Cayley-Hamilton 定理方法求 $e^{\mathbf{A}t}$。

解 首先求出 **A** 的特征多项式

$$c(\lambda)=|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ 6 & \lambda+5\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^2+5\lambda+6=(\lambda+2)(\lambda+3)$$

再求出 **A** 的特征极 $\lambda_1=-2,\lambda_2=-3$。由式(7.66)和(7.67),有

$$e^{\mathbf{A}t}=b_0\mathbf{I}+b_1\mathbf{A}=\begin{bmatrix}b_0 & b_1\\ -6b_1 & b_0-5b_1\end{bmatrix}$$

b_0 和 b_1 满足

$$b_0-2b_1=e^{-2t}$$
$$b_0-3b_1=e^{-3t}$$

由此解出

$$b_0=3e^{-2t}-2e^{-3t}\qquad b_1=e^{-2t}-e^{-3t}$$

故

$$e^{\mathbf{A}t}=\begin{bmatrix}3e^{-2t}-2e^{-3t} & e^{-2t}-e^{-3t}\\ -6e^{-2t}+6e^{-3t} & -2e^{-2t}+3e^{-3t}\end{bmatrix}$$

$$= e^{-2t}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} + e^{-3t}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

7.40 用化对角阵法重做习题 7.39。

解 设 $\mathbf{x}$ 是 $\mathbf{A}$ 对特征根 λ 的特征向量，则

$$[\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}]\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

对 $\lambda = \lambda_1 = -2$，有

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

由 $x_2 = -2x_1$ 可求出系统的解，故 $\mathbf{A}$ 对特征根 λ_1 的特征向量为

$$\mathbf{x}_1 = \alpha\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad \alpha \neq 0$$

对 $\lambda = \lambda_2 = -3$，有

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

由 $x_2 = -3x_1$ 可求出系统的解，故 $\mathbf{A}$ 对特征根 λ_2 的特征向量为

$$\mathbf{x}_2 = \beta\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad \beta \neq 0$$

在上式中设 $\alpha = \beta = 1$，并设

$$\mathbf{P} = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

则

$$\mathbf{P}^{-1} = -\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

根据式(7.68)，可得

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3e^{-2t} - 2e^{-3t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ -6e^{-2t} + 6e^{-3t} & -2e^{-2t} + 3e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$= e^{-2t}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} + e^{-3t}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

7.41 用谱分解法重做题 7.39。

解 因为 $\mathbf{A}$ 的特征根为单根，由式(7.33)有

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(\mathbf{A} - \lambda_2\mathbf{I}) = \mathbf{A} + 3\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_2 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I}) = -(\mathbf{A} + 2\mathbf{I}) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

再由式(7.70)，可得

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{-2t}\mathbf{E}_1 + e^{-3t}\mathbf{E}_2 = e^{-2t}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} + e^{-3t}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3e^{-2t} - 2e^{-3t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ -6e^{-2t} + 6e^{-3t} & -2e^{-2t} + 3e^{-3t} \end{bmatrix}$$

7.42 用拉普拉斯变换法重做题 7.39。

解 首先求 $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$，

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 6 & s+5 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+2)(s+3)}\begin{bmatrix} s+5 & 1 \\ -6 & s \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{s+5}{(s+2)(s+3)} & \dfrac{1}{(s-2)(s+3)} \\ -\dfrac{6}{(s+2)(s+3)} & \dfrac{s}{(s-2)(s+3)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+3} & \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} \\ -\frac{6}{s+2} + \frac{6}{s+3} & -\frac{2}{s+2} + \frac{3}{s+3} \end{bmatrix}$$

再由式(7.71),即得

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathscr{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] = \begin{bmatrix} 3e^{-2t} - 2e^{-3t} & e^{-2t} - e^{-3t} \\ -6e^{-2t} + 6e^{-3t} & -2e^{-2t} + 3e^{-3t} \end{bmatrix}$$

可见,当 A 的特征根为单根时,谱分解法是计算 $e^{\mathbf{A}t}$ 的最有效的方法。

7.43 已知 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$,求 $e^{\mathbf{A}t}$。

解 A 的特征多项式 $c(\lambda)$ 为

$$c(\lambda) = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda + 2 & -1 \\ -1 & \lambda + 2 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 + 4\lambda + 3 = (\lambda + 1)(\lambda + 3)$$

从而求出 A 的特征根 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3$。因为 A 的特征根为单根,由式(7.33)有

$$\mathbf{E}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + 3\mathbf{I}) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_2 = -\frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{I}) = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

再由式(7.70),可得

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{-t}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + e^{-3t}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t} & \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} \\ \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} & \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t} \end{bmatrix}$$

7.44 已知 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(a) 证明 $\mathbf{A}^3$ 是零矩阵;

(b) 利用(a)的结果求 $e^{\mathbf{A}t}$。

解 (a)通过直接相乘得

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由此即证 $\mathbf{A}^3$ 是零矩阵。

(b) 由定义式(7.53)和(a)的结果,可得

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + t\mathbf{A} + \frac{t^2}{2!}\mathbf{A}^2 + \frac{t^3}{3!}\mathbf{A}^3 + \cdots = \mathbf{I} + t\mathbf{A} + \frac{t^2}{2}\mathbf{A}^2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{t^2}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2t & t - 3t^2 \\ 0 & 1 & 3t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7.45 用 Cayley-Hamilton 定理法求习题 7.44 中的 e^{At}。

解 首先求出 A 的特征多项式

$$c(\lambda) = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -1 \\ 0 & \lambda & -3 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3$$

从而求出 $\lambda = 0$ 是 A 的三重特征根。由式(7.66),有

$$e^{At} = b_0\mathbf{I} + b_1\mathbf{A} + b_2\mathbf{A}^2$$

将 $\lambda = 0$ 代入下列方程:

$$b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2 = e^{\lambda t}$$

$$b_1 + 2b_2\lambda = te^{\lambda t}$$

$$2b_2 = t^2e^{\lambda t}$$

可解出 $b_0 = 1 \quad b_1 = t \quad b_2 = \frac{t^2}{2}$

故 $e^{At} = \mathbf{I} + t\mathbf{A} + \frac{t^2}{2}\mathbf{A}$

这一结果与习题 7.44(b)结果相同。

7.46 设 A 和 B 可互易,即 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$,证明 $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}}$。

解 根据式(7.53)得

$$e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\mathbf{A}^k\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\mathbf{B}^m\right)$$

$$= \left(\mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 + \cdots\right)\left(\mathbf{I} + \mathbf{B} + \frac{1}{2!}\mathbf{B}^2 + \cdots\right)$$

$$= \mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{B} + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 + \mathbf{AB} + \frac{1}{2!}\mathbf{B}^2 + \cdots$$

$$e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = \mathbf{I} + (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \frac{1}{2!}(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 + \cdots$$

$$= \mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{B} + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{AB} + \frac{1}{2}\mathbf{BA} + \frac{1}{2!}\mathbf{B}^2 + \cdots$$

$$e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}} - e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = \frac{1}{2}(\mathbf{AB} - \mathbf{BA}) + \cdots$$

这样,如 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$,则

$$e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}}$$

7.47 已知矩阵 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,将 A 分解为 $\mathbf{A} = \Lambda + \mathbf{N}$,

其中 $\Lambda = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(a) 证明矩阵 $\mathbf{N}^3$ 是零矩阵。

(b) 证明 Λ 和 N 可互易,即 $\Lambda\mathbf{N} = \mathbf{N}\Lambda$。

(c) 用(a)和(b)的结果求 e^{At}。

解 (a)通过直接相乘,可得

$$\mathbf{N}^2 = \mathbf{NN} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}^3 = \mathbf{N}^2\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由此即证矩阵 $\mathbf{N}^3$ 是零矩阵。

(b) 因为$\mathbf{\Lambda}$可表示为$2\mathbf{I}$,所以

$$\mathbf{\Lambda N} = 2\mathbf{IN} = 2\mathbf{N} = 2\mathbf{NI} = \mathbf{N\Lambda}$$

即$\mathbf{\Lambda}$和$\mathbf{N}$可互易。

(c) 因为$\mathbf{\Lambda N} = \mathbf{N\Lambda}$,所以可利用习题7.46的结果,有

$$e^{\mathbf{At}} = e^{(\mathbf{\Lambda}+\mathbf{N})t} = e^{\mathbf{\Lambda}t}e^{\mathbf{N}t}$$

由附录A中的式(A.49),有

$$e^{\mathbf{\Lambda}t} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} = e^{2t}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = e^{2t}\mathbf{I}$$

采用习题7.44(b)相似的方法,可得

$$e^{\mathbf{N}t} = \mathbf{I} + t\mathbf{N} + \frac{t^2}{2}\mathbf{N}^2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

故

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{\Lambda}t}e^{\mathbf{N}t} = e^{2t}\mathbf{I}e^{\mathbf{N}t} = e^{2t}e^{\mathbf{N}t} = e^{2t}\begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7.48 已知二阶线性微分方程为

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = x(t) \tag{7.127}$$

$y(0) = 2, y'(0) = 1, x(t) = e^{-t}u(t)$。用状态变量法求解系统。

[redacted] 设状态变量$q_1(t)$和$q_2(t)$为

$$q_1(t) = y(t) \qquad q_2(t) = y'(t)$$

则式(7.127)的状态方程为

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{q}(t) + \mathbf{b}x(t)$$
$$y(t) = \mathbf{c}\mathbf{q}(t)$$

其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = [1 \quad 0] \quad \mathbf{q}[0] = \begin{bmatrix} q_1(0) \\ q_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

由式(7.65)得

$$y(t) = \mathbf{c}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{q}(0) + \int_0^t \mathbf{c}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{b}x(\tau)d\tau \qquad (d = 0)$$

由习题7.39的结果,有

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{-2t}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} + e^{-3t}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{q}(0) = [1 \quad 0]\left\{e^{-2t}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} + e^{-3t}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= 7e^{-2t} - 5e^{-3t}$$

$$\mathbf{c}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{b} = [1 \quad 0]\left\{e^{-2(t-\tau)}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} + e^{-3(t-\tau)}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= e^{-2(t-\tau)} - e^{-3(t-\tau)}$$

故

$$y(t) = 7e^{-2t} - 5e^{-3t} + \int_0^t (e^{-2(t-\tau)} - e^{-3(t-\tau)})e^{-\tau}d\tau$$

$$= 7e^{-2t} - 5e^{-3t} + e^{-2t}\int_0^t e^{\tau}d\tau - e^{-3t}\int_0^t e^{2\tau}d\tau$$

$$= \frac{1}{2}e^{-t} + 6e^{-2t} - \frac{9}{2}e^{-3t} \qquad t > 0$$

这一结果与习题 3.38 的结果相同。

7.49　已知图 7-20 所示电路中，电容 C_1 和 C_2 两端的初始电压分别为 $\frac{1}{2}$V 和 1V，$R_1=R_2=R_3=1\Omega$，$C_1=C_2=1$F，用状态变量法求 $t>0$ 时电容 C_1 和 C_2 两端的电压。

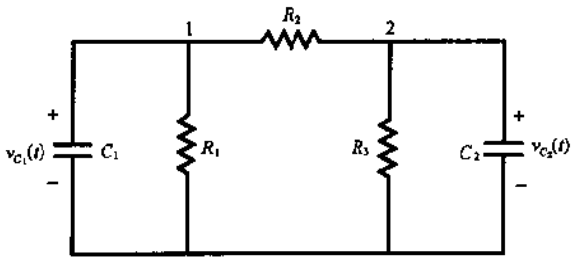


图 7-20

设状态变量 $q_1(t)$和 $q_2(t)$为

$$q_1(t)=v_{C_1}(t)\qquad q_2(t)=v_{C_2}(t)$$

对节点 1 和 2 应用基尔霍夫电流定律，得

$$C_1\dot{q}_1(t)+\frac{q_1(t)}{R_1}+\frac{q_1(t)-q_2(t)}{R_2}=0$$

$$C_2\dot{q}_2(t)+\frac{q_2(t)}{R_3}+\frac{q_2(t)-q_1(t)}{R_2}=0$$

代入 R_1,R_2,R_3,C_1 和 C_2 的值，整理得

$$\dot{q}_1(t)=-2q_1(t)+q_2(t)$$

$$\dot{q}_2(t)=q_1(t)-2q_2(t)$$

矩阵形式为

$$\dot{\mathbf{q}}(t)=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{q}(t)$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}\quad \mathbf{q}(0)=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ 1\end{bmatrix}$$

又因为 $x(t)=0$，根据式 7.63 并利用题 7.43 的结果得

$$\mathbf{q}(t)=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{q}(0)=\left\{e^{-t}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}+e^{-3t}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{3}{4}e^{-t}-\frac{1}{4}e^{-3t}\\ \frac{3}{4}e^{-t}+\frac{1}{4}e^{-3t}\end{bmatrix}$$

从而求出 $v_{C_1}(t)=\frac{3}{4}e^{-t}-\frac{1}{4}e^{-3t}$ 和 $v_{C_2}(t)=\frac{3}{4}e^{-t}+\frac{1}{4}e^{-3t}$

7.50　讨论图 7-21 所示连续时间线性时不变系统，

(a) 系统是否渐近稳定？

(b) 求系统函数 $H(s)$。

(c) 系统是否 BIBO 稳定？

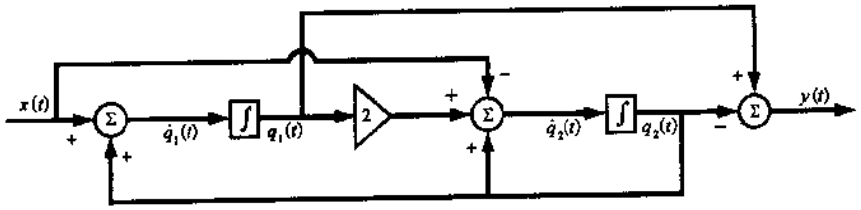


图 7-21

[redacted] (a)选择积分器输出 $q_1(t)$和 $q_2(t)$作为状态变量,可得

$$\dot{q}_1(t) = q_2(t) + x(t)$$

$$\dot{q}_2(t) = 2q_1(t) + q_2(t) - x(t)$$

$$y(t) = q_1(t) - q_2(t)$$

矩阵形式为

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{q}(t) + \mathbf{b}x(t)$$

$$y(t) = \mathbf{c}\mathbf{q}(t)$$

式中 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ $\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$ $\mathbf{c}=[1 \quad -1]$

由此求出特征多项式

$$c(\lambda) = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix}\lambda & -1\\ -2 & \lambda - 1\end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2)$$

解出 A 的特征根 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$。因为 $\mathrm{Re}(\lambda_2) > 0$,所以系统不是渐近稳定。

(b)由式(7.52),求得系统函数为

$$H(s) = \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = [1 \quad -1]\begin{bmatrix}s & -1\\ -2 & s-1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(s+1)(s-2)}[1 \quad -1]\begin{bmatrix}s-1 & 1\\ 2 & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$$

$$= \frac{2(s-2)}{(s+1)(s-2)} = \frac{2}{s+1}$$

(c)在 $H(s)$中,$s=2$ 处零根点相消,所以 $H(s)$只有 -1 一个极点,且位于左半 s 平面,因此系统是BIBO稳定。

注意,若系统不满足 IR 条件,则系统不稳定。

7.51 一个 N 阶连续时间线性时不变系统,其状态方程为

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{q}(t) + \mathbf{b}x(t)$$

如果能用输入 $x(t)$控制系统由状态 $\mathbf{q}(t_0)=\mathbf{q}_0$ 变换到 $\mathbf{q}(t_1)=\mathbf{q}_1$($\mathbf{q}_0$ 与 $\mathbf{q}_1$ 是任意有限状态),那么就称系统是可控的。证明:如果可控矩阵

$$\mathbf{M}_c = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{N-1}\mathbf{b}] \tag{7.128}$$

的秩为 N,则该系统是可控的。

[redacted] 假设 $t_0=0$ 和 $\mathbf{q}[0]=\mathbf{0}$,由式(7.63)有

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}(t_1) = e^{\mathbf{A}t_1}\int_0^{t_1} e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{b}x(\tau)d\tau \tag{7.129}$$

根据 Cayley-Hamilton 定理,可以把 $e^{-\mathbf{A}\tau}$表示为

$$e^{-\mathbf{A}\tau} = \sum_{k=0}^{N-1}\alpha_k(\tau)\mathbf{A}^k \tag{7.130}$$

将式(7.130)代入式(7.129),整理得

$$\mathbf{q}_1 = e^{\mathbf{A}t_1}\left[\sum_{k=0}^{N-1}\mathbf{A}^k\mathbf{b}\int_0^{t_1}\alpha_k(\tau)x(\tau)d\tau\right] \tag{7.131}$$

令

$$\int_0^{t_1}\alpha_k(\tau)x(\tau)d\tau = \beta_k$$

将式(7.131)改写为

$$e^{-\mathbf{A}t_1}\mathbf{q}_1 = \sum_{k=0}^{N-1}\mathbf{A}^k\mathbf{b}\beta_k$$

或

$$e^{-\mathbf{A}t_1}\mathbf{q}_1 = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{N-1}\mathbf{b}]\begin{bmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \vdots\\ \beta_{N-1}\end{bmatrix} \tag{7.132}$$

对任意的状态 $\mathbf{q}_1$,要满足可控性,式(7.132)的系数矩阵必须是满秩的,即矩阵

$$\mathbf{M}_c = [\mathbf{b} \quad \mathbf{A}\mathbf{b} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{N-1}\mathbf{b}]$$

的秩为 N。

7.52 一 N 阶连续时间线性是不变系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{q}(t) + \mathbf{b}x(t)$$
$$y(t) = \mathbf{c}\mathbf{q}(t)$$

如果由 t_0 到 t_1 有限时间范围的输出，能确定系统的初始状态 $\mathbf{q}(t_0)$，那么就称系统是可测的。证明：如果可测矩阵

$$\mathbf{M}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{cA} \\ \vdots \\ \mathbf{cA}^{N-1} \end{bmatrix} \tag{7.133}$$

的秩为 N，那么该系统是可测系统。

证明 我们用反证法来证明。假设 $\mathbf{M}_o$ 的秩小于 N，则必存在一初始状态 $\mathbf{q}[0]=\mathbf{q}_0\neq\mathbf{0}$ 使得

$$\mathbf{M}_o\mathbf{q}_0 = \mathbf{0}$$

或
$$\mathbf{cq}_0 = \mathbf{cAq}_0 = \cdots = \mathbf{cA}^{N-1}\mathbf{q}_0 = 0 \tag{7.134}$$

当 $x(t)=0, t_0=0$ 时，由式(7.65)，可得

$$y(t) = \mathbf{c}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{q}_0 \tag{7.135}$$

根据 Cayley-Hamilton 定理，$e^{\mathbf{A}t}$ 可表示为

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k(t)\mathbf{A}^k \tag{7.136}$$

将式(7.136)代入式(7.135)，再由式(7.134)可得

$$y(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k(t)\mathbf{cA}^k\mathbf{q}_0 = 0 \tag{7.137}$$

可见 $\mathbf{q}_0$ 不能从零状态中区分出来，故系统不可测。因此，若系统可测，则 $\mathbf{M}_o$ 的秩必为 N。

7.53 讨论习题 7.50 中的系统。

(a) 系统是否可控？

(b) 系统是否可测？

解 (a)由习题 7.50 的结果，有

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = [1 \quad -1]$$

则有
$$\mathbf{Ab} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

由式(7.128)得可控矩阵

$$\mathbf{M}_c = [\mathbf{b} \quad \mathbf{Ab}] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

且 $|\mathbf{M}_c|=0$。因而 $\mathbf{M}_c$ 的秩小于 2，故系统不可控。

(b) 类似地，

$$\mathbf{cA} = [1 \quad -1]\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = [-2 \quad 0]$$

由式(7.133)得可测矩阵为

$$\mathbf{M}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{cA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

且 $|\mathbf{M}_o| = -2\neq 0$。因而 $\mathbf{M}_o$ 的秩为 2，故系统可测。

注意，从习题 7.50(b)知系统函数 $H(s)$ 有零极点相消。如果系统函数 $H(s)$ 有零极点相消，那么系统不可能既可控又可测。

7.54 讨论图 7-22 所示系统。

(a) 系统是否可控？

(b) 系统是否可测？

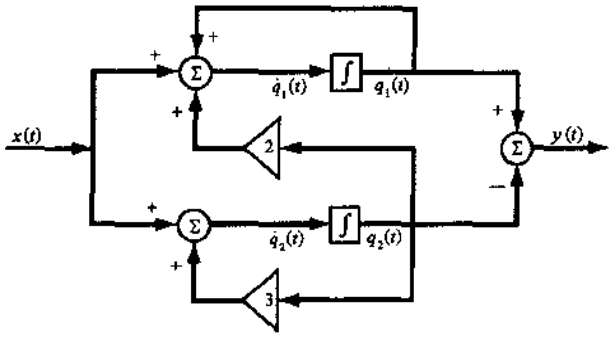


图 7-22

(c) 求系统函数 $H(s)$。

[redacted] (a)如图所示,选择状态变量 $q_1(t)$和 $q_2(t)$,有

$$\dot{q}_1(t) = q_1(t) + 2q_2(t) + x(t)$$

$$\dot{q}_2(t) = 3q_2(t) + x(t)$$

$$y(t) = q_1(t) - q_2(t)$$

矩阵形式为

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{q}(t) + \mathbf{b}x(t)$$

$$y(t) = \mathbf{c}\mathbf{q}(t)$$

式中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c} = [1 \quad -1]$$

$$\mathbf{Ab} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

根据式(7.128),可控矩阵为

$$\mathbf{M}_c = [\mathbf{b} \quad \mathbf{Ab}] = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

且$|\mathbf{M}_c| = 0$。因而其秩小于 2,故系统不可控。

(b) 类似地,

$$\mathbf{cA} = [1 \quad -1]\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = [1 \quad -1]$$

由式(7.133)得可测矩阵为

$$\mathbf{M}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{cA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

且$|\mathbf{M}_c| = 0$。因而其秩小于 2,故系统不可测。

(c)由式(7.52)得系统函数 $H(s)$为

$$H(s) = \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}$$

$$= [1 \quad -1]\begin{bmatrix} s-1 & -2 \\ 0 & s-3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{(s-1)(s-3)}[1 \quad -1]\begin{bmatrix} s-3 & 2 \\ 0 & s-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

可见,系统既不可控又不可测。

补 充 习 题

7.55 一离散时间线性时不变系统如图 7-23 所示,选取 $q_1[n]$和 $q_2[n]$作为状态变量,求系统的状态空间表示式。

答案

$$\mathbf{q}[n+1]=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{6}\end{bmatrix}\mathbf{q}[n]+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}x[n]$$

$$y[n]=[-1 \quad 2]\mathbf{q}[n]$$

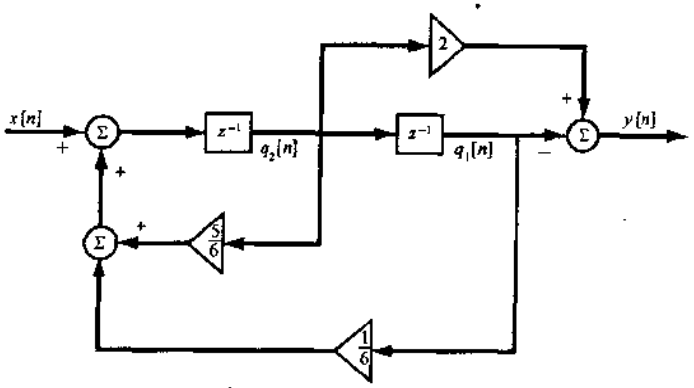


图 7-23

7.56 一离散时间线性时不变系统如图 7-24 所示，选取 $q_1[n]$和 $q_2[n]$作为状态变量，求系统的状态空间表示式。

答案

$$\mathbf{q}[n+1]=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & 0\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\mathbf{q}[n]+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}x[n]$$

$$y[n]=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\mathbf{q}[n]$$

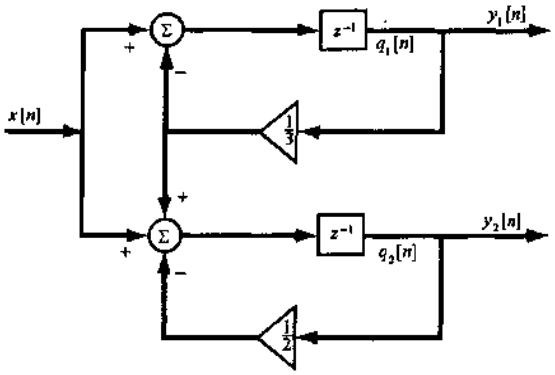


图 7-24

7.57 一离散时间线性时不变系统如图 7-25 所示。

(a) 求以 $q_1[n]$和 $q_2[n]$为状态变量的状态空间表达式。

(b) 求系统函数 $H(z)$。

(c) 求描述系统的差分方程。

答案 (a) $\mathbf{q}[n+1]=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 1 & 0\end{bmatrix}\mathbf{q}[n]+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}x[n]$

$$y[n]=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}\mathbf{q}[n]-\frac{1}{6}x[n]$$

(b) $H(z)=-\frac{1}{6}\cdot\frac{z^2-4z-1}{z^2-z+\frac{1}{2}}$

(c) $y[n]-y[n-1]+\frac{1}{2}y[n-2]=-\frac{1}{6}x[n]+\frac{2}{3}x[n-1]+\frac{1}{6}x[n-2]$

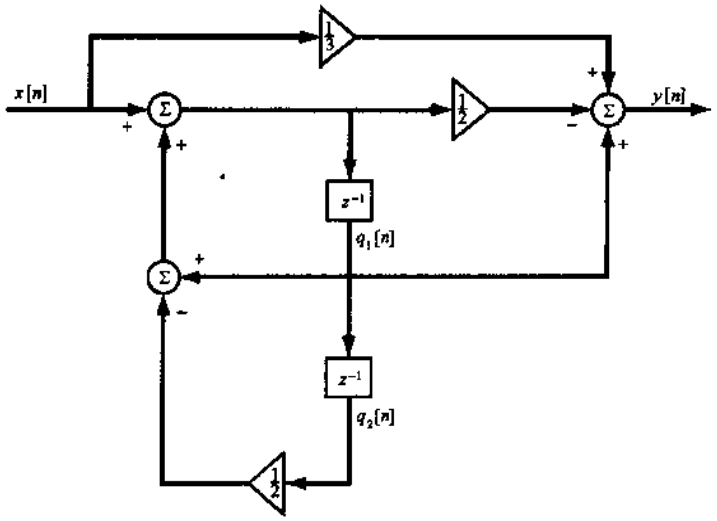


图 7-25

7.58 一离散时间线性时不变系统的差分方程为

$$y[n]+y[n-1]-6y[n-2]=2x[n-1]+x[n-2]$$

写出系统状态方程的两种规范形式。

答案 (1) $\mathbf{q}[n+1]=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 6 & 0\end{bmatrix}\mathbf{q}[n]+\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}x[n]$

$$y[n]=[1\quad 0]\mathbf{q}[n]$$

(2) $\mathbf{v}[n+1]=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 6 & -1\end{bmatrix}\mathbf{v}[n]+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}x[n]$

$$y[n]=[1\quad 2]\mathbf{v}[n]$$

7.59 已知 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{1}{6} & \frac{5}{6}\end{bmatrix}$，求 $\mathbf{A}^n$。

(a) 用 Cayley-Hamilton 理论法。

(b) 用化对角阵法。

答案

$$\mathbf{A}^n=\begin{bmatrix}-2\left(\frac{1}{2}\right)^n+3\left(\frac{1}{3}\right)^n & 6\left(\frac{1}{2}\right)^n-6\left(\frac{1}{3}\right)^n\\ -\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n & 3\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\left(\frac{1}{3}\right)^n\end{bmatrix}$$

7.60 已知 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 4 & 1\end{bmatrix}$，求 $\mathbf{A}^n$。

(a) 用矩阵谱分解法。

(b) 用 z 变换法。

答案

$$\mathbf{A}^n=\begin{bmatrix}(3)^n & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{5}(2)^n+\frac{4}{5}(-3)^n & \frac{1}{5}(2)^n-\frac{1}{5}(-3)^n\\ 0 & \frac{4}{5}(2)^n-\frac{4}{5}(-3)^n & \frac{4}{5}(2)^n-\frac{1}{5}(-3)^n\end{bmatrix}$$

7.61 已知矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\end{bmatrix}$

(a) 求 $\mathbf{A}$ 的最小多项式 $m(\lambda)$。

(b) 用(a)的结果计算 $\mathbf{A}^n$。

答案 (a) $m(\lambda)=(\lambda-3)(\lambda+3)=\lambda^2-9$

(b) $$\mathbf{A}^n=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}3^n+2(-3)^n & 3^n-(-3)^n & 3^n-(-3)^n\\ 3^n-(-3)^n & 3^n+2(-3)^n & 3^n-(-3)^n\\ 3^n-(-3)^n & 3^n-(-3)^n & 3^n+2(-3)^n\end{bmatrix}$$

7.62 一离散时间线性时不变系统,其状态空间表示式为

$$\mathbf{q}[n+1]=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}\mathbf{q}[n]+\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}x[n]$$

$$y[n]=[0\quad 1\quad 0]\mathbf{q}[n]$$

(a) 求系统函数 $H(z)$。

(b) 判断系统是否可控。

(c) 判断系统是否可测。

答案 (a) $H(z)=\dfrac{1}{(z-1)^2}$

(b) 系统可控。

(c) 系统不可测。

7.63 讨论习题 7.55 中的离散时间 LTI 系统,判断

(a) 系统是否渐近稳定?

(b) 系统是否 BIBO 稳定?

(c) 系统是否可控?

(d) 系统是否可测?

答案 (a) 系统是渐近稳定。

(b) 系统是 BIBO 稳定。

(c) 系统可控。

(d) 系统不可测。

7.64 LTI 系统的可控性和可测性可以通过化系统矩阵 A 为对角阵来判断。已知系统的状态空间表示式为

$$\mathbf{v}[n+1]=\mathbf{\Lambda}\mathbf{v}[n]+\hat{\mathbf{b}}x[n]$$

$$y[n]=\hat{\mathbf{c}}\mathbf{v}[n]$$

(其中$\mathbf{\Lambda}$是一对角形矩阵)若向量 $\hat{\mathbf{b}}$ 不包含零元素,那么系统是可控的。若向量 $\hat{\mathbf{c}}$ 不包含零元素,那么系统是可测的。讨论习题 7.55 中的离散时间 LTI 系统。

(a) 设 $\mathbf{v}[n]=\mathbf{T}\mathbf{q}[n]$,求使系统矩阵化为对角阵的矩阵 $\mathbf{T}$。

(b) 写出系统新的状态空间表示式。

(c) 利用(b)的结果,考察系统的可控性和可测性。

答案 (a) $\mathbf{T}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{bmatrix}$

(b) $$\mathbf{v}[n+1]=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\mathbf{v}[n]+\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}x[n]$$

$$y[n]=[-1\quad 0]\mathbf{v}[n]$$

(c) 系统可控,但是不可测。

7.65 如图 7-26 所示电路,选取状态变量 $q_1(t)=i_L(t)$, $q_2(t)=v_c(t)$,输出 $y_1(t)=i_1(t)$, $y_2(t)=v_c(t)$。设 $R_1=R_2=1\Omega$, $L=1H$, $C=1F$,求电路的状态空间表示式。

答案 $$\dot{\mathbf{q}}(t)=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\mathbf{q}(t)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}x(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\mathbf{q}(t)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}x(t)$$

7.66 一连续时间 LTI 系统如图 7-27 所示。

(a) 求以 $q_1(t)$和 $q_2(t)$为状态变量的状态空间表示。

(b) 当 a 为何值时系统是渐近稳定的?

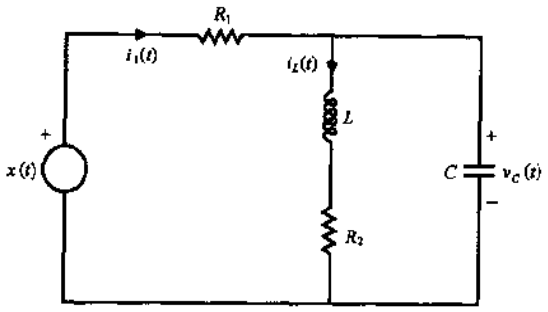


图 7-26

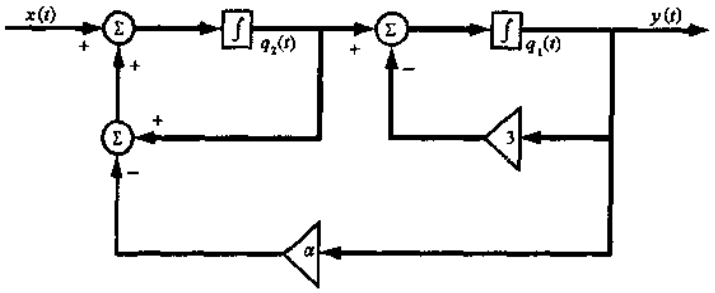


图 7-27

答案　(a)　$\dot{\mathbf{q}}(t)=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ -\alpha & 1\end{bmatrix}\mathbf{q}(t)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}x(t)$

$$y(t)=[1\quad 0]\mathbf{q}(t)$$

(b)　$\alpha\geqslant 4$

7.67　一连续时间 LTI 系统的系统函数为

$$H(s)=\frac{3s^2-1}{s^3+3s^2-s-2}$$

写出系统的两种规范形式的状态方程。

答案　(1)　$\dot{\mathbf{q}}(t)=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 0\end{bmatrix}\mathbf{q}(t)+\begin{bmatrix}3\\0\\-1\end{bmatrix}x(t)$

$$y(t)=[1\quad 0\quad 0]\mathbf{q}(t)$$

(2)　$\dot{\mathbf{v}}(t)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -3\end{bmatrix}\mathbf{v}(t)+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}x(t)$

$$y(t)=[-1\quad 0\quad 3]\mathbf{v}(t)$$

7.68　一连续时两 LTI 系统如图 7-28 所示，

(a) 求以 $q_1(t)$和 $q_2(t)$为状态变量的状态空间表示式；

(b) 系统是否渐近稳定？

(c) 求系统函数 $H(s)$；

(d) 系统是否 BIBO 稳定？

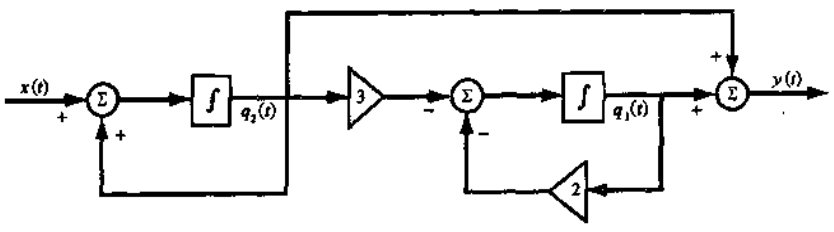


图 7-28

答案　(a)　$\dot{\mathbf{q}}(t)=\begin{bmatrix}-2 & -3\\ 0 & 1\end{bmatrix}\mathbf{q}(t)+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}x(t)$

$$y(t)=[1 \quad 1]\mathbf{q}(t)$$

(b) 系统不是渐近稳定。

(c) $H(s)=\dfrac{1}{s+2}$

(d) 系统是 BIBO 稳定。

7.69 已知 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$，求 $e^{\mathbf{A}t}$。

(a) 用 Cayley-Hamilton 定理法。

(b) 用矩阵谱分解法。

答案 $e^{\mathbf{A}t}=e^{-t}\begin{bmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{bmatrix}$

7.70 对于习题 7.69 中的矩阵 A，求 $e^{-\mathbf{A}t}$ 并证明 $e^{-\mathbf{A}t}=(e^{\mathbf{A}t})^{-1}$。

答案 $e^{-\mathbf{A}t}=e^{t}\begin{bmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{bmatrix}$

7.71 已知 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}$，求 $e^{\mathbf{A}t}$。

(a) 用化对角阵法。

(b) 用拉普拉斯变换法。

答案 $e^{\mathbf{A}t}=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}$

7.72 对于习题 7.65 中的电路(图 7-26)，$x(t)=u(t)$，在 IR 条件下，求 $v_c(t)$。

答案 $v_c(t)=\dfrac{1}{2}(1+e^{-t}\sin t-e^{-t}\cos t) \quad t>0$

7.73 用状态空间法，解线性微分方程

$$y''(t)+3y'(t)+2y(t)=0$$

已知初始条件 $y(0)=0, y'(0)=1$。

答案 $y(t)=e^{-t}-e^{-2t}, t>0$

7.74 和离散系统一样，连接时间 LTI 系统的可控性和可测性也可以通过化系统矩阵 A 为对角阵来判断。设系统的状态空间表示为

$$\mathbf{v}(t)=\mathbf{\Lambda}\mathbf{v}(t)+\hat{\mathbf{b}}x(t)$$

$$y(t)=\hat{\mathbf{c}}\mathbf{v}(t)$$

(其中Λ是一对角形矩阵)若向量 $\hat{\mathbf{b}}$ 不包含零向量，那么系统是可控的。若向量 $\hat{\mathbf{c}}$ 不包含零向量，那么系统是可测的。讨论习题 7.50 中的连续时间 LTI 系统。

(a) 求系统矩阵 A 为对角形矩阵的系统状态空间表示。

(b) 系统是否可控?

(c) 系统是否可测?

答案 (a) $\dot{\mathbf{v}}(t)=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\mathbf{v}(t)+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}x(t)$

$$y(t)=[2 \quad -1]\mathbf{v}(t)$$

(b) 系统不可控。

(c) 系统可测。

附录 A　矩阵原理复习

A.1　矩阵符号及运算

A. 定义

1. $m \times n$ 矩阵 **A** 是一个有 m 行和 n 列元素的矩形阵列，表示为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m \times n} \tag{A.1}$$

当 $m = n$ 时，**A** 称为 n 阶方阵。

2. $1 \times n$ 矩阵称为 n 维行矢量，表示为

$$[a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}] \tag{A.2}$$

$m \times 1$ 矩阵称为 n 维列矢量，表示为

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \tag{A.3}$$

3. 0 矩阵 **0** 是一个所含元素全部为 0 的矩阵。

4. 对角矩阵 **D** 是一个方阵，其不在主对角线上的所有元素都为 0，表示为

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} \tag{A.4}$$

有时，式(A.4)中的对角矩阵 **D** 表示为

$$\mathbf{D} = \mathrm{diag}[d_1 \quad d_2 \quad \cdots \quad d_n] \tag{A.5}$$

5. 单位矩阵 **I** 是一个对角矩阵，其主对角线上的所有元素都等于 1。

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{A.6}$$

B. 运算

设 $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{m \times n}$，$\mathbf{B} = [b_{ij}]_{m \times n}$ 和 $\mathbf{C} = [c_{ij}]_{m \times n}$。

a. 两个矩阵的相等性

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \Rightarrow a_{ij} = b_{ij} \tag{A.7}$$

b. 叠加性

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \Rightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \tag{A.8}$$

c. 乘以比例 α

$$\mathbf{B} = \alpha\mathbf{A} \Rightarrow b_{ij} = \alpha a_{ij} \tag{A.9}$$

如果 $\alpha=1$，则 $\mathbf{B}=-\mathbf{A}$ 称为 $\mathbf{A}$ 的负阵。

例 A.1 设

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&0&4\end{bmatrix}\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}2&0&-1\\4&1&-2\end{bmatrix}$$

则

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1+2&2+0&3-1\\-1+4&0+1&4-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2&2\\3&1&2\end{bmatrix}$$

$$-\mathbf{B}=(-1)\mathbf{B}=\begin{bmatrix}-2&0&1\\-4&-1&2\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1-2&2-0&3+1\\-1-4&0-1&4+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&2&4\\-5&-1&6\end{bmatrix}$$

注意：

1. $\mathbf{A}=\mathbf{B}$ 且 $\mathbf{B}=\mathbf{C}\Rightarrow\mathbf{A}=\mathbf{C}$
2. $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$
3. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$
4. $\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{A}=\mathbf{A}$ (A.10)
5. $\mathbf{A}-\mathbf{A}=\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{0}$
6. $(\alpha+\beta)\mathbf{A}=\alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{A}$
7. $\alpha(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\alpha\mathbf{A}+\alpha\mathbf{B}$
8. $\alpha(\beta\mathbf{A})=(\alpha\beta)\mathbf{A}=\beta(\alpha\mathbf{A})$

d. 矩阵相乘

设 $\mathbf{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$，$\mathbf{B}=[b_{ij}]_{m\times n}$ 和 $\mathbf{C}=[c_{ij}]_{m\times n}$。

$$\mathbf{C}=\mathbf{AB}\Rightarrow c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj} \tag{A.11}$$

矩阵乘积 $\mathbf{AB}$ 只在 $\mathbf{A}$ 的列数等于 $\mathbf{B}$ 的行数时成立。在此情况下，$\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 称为是一致的。

例 A.2 设

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&2\\2&3\end{bmatrix}\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&2\\3&-1\end{bmatrix}$$

则

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&2\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0(1)+(-1)3&0(2)+(-1)(-1)\\1(1)+2(3)&1(2)+2(-1)\\2(1)+(-3)3&2(2)+(-3)(-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&1\\7&0\\-7&7\end{bmatrix}$$

但是 $\mathbf{BA}$ 不成立。并且，即使 $\mathbf{AB}$ 和 $\mathbf{BA}$ 都成立，但一般地

$$\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA} \tag{A.12}$$

例 A.3 设

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&2\end{bmatrix}\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&2\\3&-1\end{bmatrix}$$

则

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}0&-1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&1\\7&0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{BA}=\begin{bmatrix}1&2\\3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&3\\-1&-5\end{bmatrix}\neq\mathbf{AB}$$

下面是一个 $\mathbf{BA}=\mathbf{AB}$ 的例子。

例 A.4　设

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$$

则

$$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 12\end{bmatrix}$$

注意：

1. $\mathbf{A0}=\mathbf{0A}=\mathbf{0}$
2. $\mathbf{AI}=\mathbf{IA}=\mathbf{A}$
3. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}=\mathbf{AC}+\mathbf{BC}$　　(A.13)
4. $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$
5. $(\mathbf{AB})\mathbf{C}=\mathbf{A}(\mathbf{BC})=\mathbf{ABC}$
6. $\alpha(\mathbf{AB})=(\alpha\mathbf{A})\mathbf{B}=\mathbf{A}(\alpha\mathbf{B})$

还要注意，$\mathbf{AB}=0$ 不能说明 $\mathbf{A}=0$ 或 $\mathbf{B}=0$。

例 A.5　设

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & -2\end{bmatrix}$$

则

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

A.2　转置矩阵与逆矩阵

A. 转置矩阵

设 $\mathbf{A}$ 是一个 $n\times m$ 矩阵，$\mathbf{A}$ 的**转置矩阵**是指 $\mathbf{A}$ 矩阵的行和列相互交换所构成的 $m\times n$ 矩阵，用 $\mathbf{A}^T$ 表示。

$$\mathbf{B}=\mathbf{A}^T\Rightarrow b_{ij}=a_{ji}\qquad (A.14)$$

例 A.6

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 4\end{bmatrix}\qquad \mathbf{A}^T=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 4\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\\ 3 & 4\end{bmatrix}$$

如果 $\mathbf{A}^T=\mathbf{A}$，则称 A 是对称矩阵。如果 $\mathbf{A}^T=-\mathbf{A}$，则称 $\mathbf{A}$ 是斜对称矩阵。

例 A.7

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & -1\\ 3 & -1 & 5\end{bmatrix}\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\ -1 & 0 & 3\\ 2 & -3 & 0\end{bmatrix}$$

则 $\mathbf{A}$ 是对称矩阵，$\mathbf{B}$ 是斜对称矩阵。

注意，如果一个矩阵是斜对称矩阵，则其对角线上的元素都为 0。

还要注意：

1. $(\mathbf{A}^T)^T=\mathbf{A}$
2. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T=\mathbf{A}^T+\mathbf{B}^T$　　(A.15)
3. $(\alpha\mathbf{A})^T=\alpha\mathbf{A}^T$
4. $(\mathbf{AB})^T=\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$

B. 逆矩阵

如存在矩阵 **A** 和 **B** 满足

$$\mathbf{BA} = \mathbf{AB} = \mathbf{I} \tag{A.16a}$$

则称矩阵 **A** 是可逆的。矩阵 **B** 称为矩阵 **A** 的逆矩阵，用 $\mathbf{A}^{-1}$ 表示。因此

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} \tag{A.16b}$$

例 A.8

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

因此

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

注意：

1. $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$
2. $(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1}$ (A.17)
3. $(\alpha\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{\alpha}\mathbf{A}^{-1}$
4. $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

注意，如果 **A** 是可逆的，则 **AB** = **0** 表示 **B** = **0**，因为

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AB} = \mathbf{IB} = \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

A.3 线性无关与秩

A. 线性无关

设 $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{a}_n]$，其中 $\mathbf{a}_i$ 表示 **A** 的第 i 列向量。对于一组列向量 $\mathbf{a}_i$，如果存在不全为 0 的 $\alpha_i (i = 1, 2, \cdots, n)$，满足

$$\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0} \tag{A.18}$$

则称这组列向量 $\mathbf{a}_i$ 是线性相关的。如果式(A.18)只在所有 $\alpha_i = 0$ 时成立，则称这组列向量是线性无关的。

例 A.9 设

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix}1\\ -1\\ 0\end{bmatrix} \qquad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix}2\\ 1\\ -1\end{bmatrix} \qquad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix}4\\ 5\\ -3\end{bmatrix}$$

因为 $2\mathbf{a}_1 + (-3)\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$，则 $\mathbf{a}_1$、$\mathbf{a}_2$ 和 $\mathbf{a}_3$ 是线性相关的。设

$$\mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \qquad \mathbf{d}_2 = \begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix} \qquad \mathbf{d}_3 = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

则

$$\alpha_1\mathbf{d}_1 + \alpha_2\mathbf{d}_2 + \alpha_3\mathbf{d}_3 = \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

表明 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$，因此 $\mathbf{d}_1$、$\mathbf{d}_2$ 和 $\mathbf{d}_3$ 是线性无关的。

B. 矩阵的秩

矩阵 **A** 中线性无关的列向量的数量称为列秩，矩阵 **A** 中线性无关的行向量的数量称为行

秩。可以表示为

$$\mathbf{A}\text{的秩} = \mathbf{A}\text{的列秩} = \mathbf{A}\text{的行秩} \tag{A.19}$$

注意,如果一个 $N\times N$ 矩阵 **A** 的秩为 N,则 **A** 是可逆的,$\mathbf{A}^{-1}$存在。

A.4 行列式

A. 定义

设 $\mathbf{A}=[a_{ij}]$是一个 N 阶方阵,与 **A** 相关的数值称为其行列式,用 detA 或$|\mathbf{A}|$表示。设 $\mathbf{M}_{ij}$ 是一个 $N-1$ 阶方阵,通过删除 **A** 的第 i 行和第j 列得到。数值 A_{ij}定义为

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\,|\,\mathbf{M}_{ij}\,| \tag{A.20}$$

称为 a_{ij}的因子。则 detA 可以通过下式得到:

$$\det\mathbf{A} = |\,\mathbf{A}\,| = \sum_{k=1}^{N} a_{ik}A_{ik} \qquad i = 1,2,\cdots,N \tag{A.21a}$$

或

$$\det\mathbf{A} = |\,\mathbf{A}\,| = \sum_{k=1}^{N} a_{kj}A_{kj} \qquad j = 1,2,\cdots,N \tag{A.21b}$$

式(A.21a)称为$|\mathbf{A}|$沿第 i 行的拉普拉斯表达式,式(A.21b)称为$|\mathbf{A}|$沿第 j 列的拉普拉斯表达式。

例 A.10 对于 1×1 矩阵

$$\mathbf{A} = [a_{11}] \rightarrow |\,\mathbf{A}\,| = a_{11} \tag{A.22}$$

对于 2×2 矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \rightarrow |\,\mathbf{A}\,| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{A.23}$$

对于 3×3 矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

利用式(A.21a)和(A.23),得

$$|\,\mathbf{A}\,| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{A.24}$$

B. 矩阵的行列式秩

矩阵 **A** 的行列式秩是指 **A** 的最大方子阵 **M** 的阶次,其中 detM≠0。可以证明,A 的秩等于 **A** 的行列式秩。

例 A.11 设

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

注意,$|\mathbf{A}|=0$。其中行列式不为 0 的最大子阵是

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

因此,矩阵 **A** 的秩为 2(见例 A.9)。

C. 矩阵的逆矩阵

利用行列式,可以计算 $N\times N$ 矩阵 **A** 矩阵的逆矩阵,

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{\det\mathbf{A}}\mathrm{adj}\mathbf{A} \tag{A.25}$$

且

$$\mathrm{adj}\mathbf{A}=[A_{ij}]^T=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{N1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{N2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{1N} & A_{2N} & \cdots & A_{NN}\end{bmatrix} \tag{A.26}$$

其中,A_{ij} 是式(A.20)中定义的 a_{ij} 的因子,adj 表示转置。式(A.25)主要用于 $N=2$ 和 $N=3$ 的情况。

例 A.12 设

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -3\\ 1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & -2\end{bmatrix}$$

则

$$|\mathbf{A}|=1\begin{vmatrix}2 & 0\\ -1 & -2\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-4-3(-7)=17$$

$$\mathrm{adj}\ \mathbf{A}=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}2 & 0\\ -1 & -2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & -3\\ -1 & -2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & -3\\ 2 & 0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & -2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & -3\\ 3 & -2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -3\\ 1 & 0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 3 & 6\\ 2 & 7 & -3\\ -7 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

因此

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{17}\begin{bmatrix}-4 & 3 & 6\\ 2 & 7 & -3\\ -7 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

对 2×2 矩阵,有

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\begin{bmatrix}a_{22} & -a_{12}\\ -a_{21} & a_{11}\end{bmatrix} \tag{A.27}$$

由式(A.25)可以看出,如果 $\det\mathbf{A}=0$,则 $\mathbf{A}^{-1}$ 不存在。如果 $\det\mathbf{A}=0$,则矩阵 **A** 称为奇异矩阵,如果 $\det\mathbf{A}\neq 0$,则矩阵 **A** 称为非奇异矩阵。因此,如果一个矩阵是非奇异的,则该矩阵是可逆的,$\mathbf{A}^{-1}$ 存在。

A.5 特征值与特征向量

A. 定义

设 **A** 是一个 $N\times N$ 矩阵。如果对于任意比例 λ 和非零的列向量 **x**,有

$$\mathbf{Ax}=\lambda\mathbf{x} \tag{A.28}$$

则称 λ 为 **A** 的特征值,**x** 为与 λ 相关的特征向量。

B. 特征方程

式(A.28)可以重写为

$$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{A.29}$$

其中，$\mathbf{I}$ 是 N 阶单位矩阵。如果 $\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}$ 是奇异的，则式(A.29)有非零的特征值，即

$$| \lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} | = 0 \tag{A.30}$$

称为 $\mathbf{A}$ 的特征方程。多项式

$$c(\lambda) = | \lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} | = \lambda^N + c_{N-1}\lambda^{N-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0 \tag{A.31}$$

称为 $\mathbf{A}$ 的特征多项式。现在，如果 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_i$ 是 $\mathbf{A}$ 的不同的特征值，则有

$$c(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda - \lambda_i)^{m_i} \tag{A.32}$$

其中，$m_1 + m_2 + \cdots + m_i = N$，且 m_i 称为 λ_i 的代数乘方。

定理 A.1 设 $\lambda_k (k = 1, 2, \cdots, i)$ 是 $\mathbf{A}$ 的不同的特征值，并且设 $\mathbf{x}_k$ 是与特征值 λ_k 相关的特征向量。则特征向量集 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_i$ 是线性无关的。

证明 用矛盾法证明。假设 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_i$ 是线性相关的。则存在 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_i$ 不全为零，使得

$$\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_i\mathbf{x}_i = \sum_{k=1}^{i}\alpha_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0} \tag{A.33}$$

假设 $\alpha_1 \neq 0$，则由式(A.33)得

$$(\lambda_2\mathbf{I} - \mathbf{A})(\lambda_3\mathbf{I} - \mathbf{A})\cdots(\lambda_i\mathbf{I} - \mathbf{A})\Big[\sum_{k=1}^{i}\alpha_k x_k\Big] = \mathbf{0} \tag{A.34}$$

现在由式(A.28)得

$$(\lambda_j\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}_k = (\lambda_j - \lambda_k)\mathbf{x}_k \quad j \neq k$$

且

$$(\lambda_k\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$$

则式(A.34)可以改写为

$$\alpha_1(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)\cdots(\lambda_i - \lambda_1)\mathbf{x}_1 = \mathbf{0} \tag{A.35}$$

因为 $\lambda_k (k = 1, 2, \cdots, i)$ 是互不相同的，式(A.35)表明 $\alpha_1 = 0$，这与假设相矛盾。因此，特征向量集 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_i$ 是线性无关的。

A.6 对角矩阵及其相似变换

A. 对角矩阵

假设一个 $N \times N$ 矩阵 $\mathbf{A}$ 的所有特征值都是不同的。设 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_N$ 是与 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N$ 有关的特征向量。设

$$\mathbf{P} = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \cdots \mathbf{x}_N] \tag{A.36}$$

则

$$\begin{aligned}\mathbf{AP} &= \mathbf{A}[\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{x}_N] \\ &= [\mathbf{A}\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{A}\mathbf{x}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{A}\mathbf{x}_N] \\ &= [\lambda_1\mathbf{x}_1 \quad \lambda_2\mathbf{x}_2 \quad \cdots \quad \lambda_N\mathbf{x}_N] \\ &= [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{x}_N]\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N\end{bmatrix} = \mathbf{P}\boldsymbol{\Lambda}\end{aligned} \tag{A.37}$$

其中

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N\end{bmatrix} \tag{A.38}$$

根据定理 A.1，**P** 有 N 个线性无关的列向量。因此，**P** 是非奇异的，$\mathbf{P}^{-1}$存在。并且有

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N \end{bmatrix} \tag{A.39}$$

P 称为对角矩阵或特征向量矩阵，且 **A** 是特征值矩阵。

注意：

1. 一个 $N\times N$ 矩阵 **A** 是对角矩阵的充分(但不必要)条件是，**A** 有 N 个不同的特征值。

2. 如果 **A** 没有 N 个无关的特征向量，则 **A** 不是对角矩阵。

3. 对角矩阵 **P** 不是惟一的。重新排列 **P** 中各列或用非零的比例因子相乘，将产生新的对角矩阵。

B. 相似变换

设 **A** 和 **B** 是有相同阶次的两个方阵。如果存在一个非奇异矩阵 **Q**，使得

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{AQ} \tag{A.40}$$

则称 **B** 与 **A** 相似，式(A.40)称为相似变换。

注意：

1. 如果 **B** 与 **A** 相似，则 **A** 与 **B** 相似。

2. 如果 **A** 与 **B** 相似，且 **B** 与 **C** 相似，则 **A** 与 **C** 相似。

3. 如果 **A** 和 **B** 是相似的，则 **A** 和 **B** 有相同的特征值。

4. 一个 $N\times N$ 矩阵 **A**，当且仅当 **A** 存在 N 个线性无关的特征向量时，**A** 才与对角矩阵 **D** 相似。

A.7 矩阵函数

A. 矩阵的幂

一个 $N\times N$ 矩阵 **A** 的幂可以定义为

$$\mathbf{A}^n = \underbrace{\mathbf{AA}\cdots\mathbf{A}}_{n}$$

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{I} \tag{A.41}$$

通过直接相乘很容易验证。如果

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_N \end{bmatrix} \tag{A.42}$$

则

$$\mathbf{D}^n = \begin{bmatrix} d_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_N^n \end{bmatrix} \tag{A.43}$$

注意：

1. 如果 **A** 的特征值是 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_i$，则 $\mathbf{A}^n$ 的特征值是$\lambda_1^n, \lambda_2^n, \cdots, \lambda_i^n$。

2. **A** 的特征向量仍然是 $\mathbf{A}^n$ 的特征向量。

3. 如果 **P** 是 **A** 的对角矩阵，即

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\mathbf{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N\end{bmatrix} \tag{A.44}$$

则 **P** 也是 $\mathbf{A}^n$ 的对角矩阵,即

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^n\mathbf{P}=\mathbf{\Lambda}^n=\begin{bmatrix}\lambda_1^n & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2^n & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_N^n\end{bmatrix} \tag{A.45}$$

因为

$$\begin{aligned}(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP})(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP})&=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^2\mathbf{P}=\mathbf{\Lambda}^2\\ (\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^2\mathbf{P})(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP})&=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^3\mathbf{P}=\mathbf{\Lambda}^3\\ &\vdots\end{aligned} \tag{A.46}$$

B. 矩阵函数

设一个 λ 的函数为

$$f(\lambda)=a_0+a_1\lambda+a_2\lambda^2+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\lambda_k \tag{A.47}$$

对这类函数,可以推广到 $N\times N$ 矩阵 **A**,即

$$f(\mathbf{A})=a_0\mathbf{I}+a_1\mathbf{A}+a_2\mathbf{A}^2+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\mathbf{A}^k \tag{A.48}$$

如果 **A** 是式(A.42)中的对角矩阵,则利用式(A.43),得

$$\begin{aligned}f(\mathbf{D})&=a_0\mathbf{I}+a_1\mathbf{D}+a_2\mathbf{D}^2+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\mathbf{D}^k\\ &=\begin{bmatrix}\sum_{k=0}^{\infty}a_kd_1^k & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty}a_kd_2^k & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{k=0}^{\infty}a_kd_N^k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f(d_1) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & f(d_2) & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & f(d_N)\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{A.49}$$

如果 **P** 是 **A** 的对角矩阵,即[式(A.44)]

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}=\mathbf{\Lambda}$$

则有

$$\mathbf{A}=\mathbf{P\Lambda P}^{-1} \tag{A.50}$$

且

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^2&=(\mathbf{P\Lambda P}^{-1})(\mathbf{P\Lambda P}^{-1})=\mathbf{P\Lambda}^2\mathbf{P}^{-1}\\ \mathbf{A}^3&=(\mathbf{P\Lambda}^2\mathbf{P}^{-1})(\mathbf{P\Lambda P}^{-1})=\mathbf{P\Lambda}^3\mathbf{P}^{-1}\end{aligned} \tag{A.51}$$

因此,得

$$f(\mathbf{A})=\mathbf{P}f(\mathbf{\Lambda})\mathbf{P}^{-1} \tag{A.52}$$

用 **D** 代替式(A.49)中的 $\mathbf{\Lambda}$,得

$$f(\mathbf{A})=\mathbf{P}\begin{bmatrix}f(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & f(\lambda_2) & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_N)\end{bmatrix}\mathbf{P}^{-1} \tag{A.53}$$

其中，λ_i 是 A 的特征值。

C. 凯莱-哈密尔顿定理

一个 $N\times N$ 矩阵 A 的特征多项式 $c(\lambda)$ 为幂可以定义为[式(A.31)]

$$c(\lambda) = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \lambda^N + c_{N-1}\lambda^{N-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0$$

凯莱-哈密尔顿定理是，矩阵 A 满足自身的特征方程，即

$$c(\mathbf{A}) = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \mathbf{A}^N + c_{N-1}\mathbf{A}^{N-1} + \cdots + c_1\mathbf{A} + c_0\mathbf{I} \tag{A.54}$$

例 A.13 设

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

其特征多项式为

$$c(\lambda) = |\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 3) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$$

且

$$\begin{aligned} c(\mathbf{A}) &= \mathbf{A}^2 - 5\mathbf{A} + 6\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^2 - 5\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + 6\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ 0 & 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

改写式(A.54)，得

$$\mathbf{A}^N = -c_0\mathbf{I} - c_1\mathbf{A} - \cdots - c_{N-1}\mathbf{A}^{N-1} \tag{A.55}$$

等式两边同时乘以 A，然后在等式右端代入式(A.55)，重新排列，得

$$\mathbf{A}^{N+1} = \alpha_0\mathbf{I} + \alpha_1\mathbf{A} + \cdots + \alpha_{N-1}\mathbf{A}^{N-1} \tag{A.56}$$

继续此过程，可以将 A 的任意正整数幂表示为 $\mathbf{I}, \mathbf{A}, \cdots, \mathbf{A}^{N-1}$ 的线性组合。因此，由式(A.48)定义的 $f(\mathbf{A})$ 可以表示为

$$f(\mathbf{A}) = b_0\mathbf{I} + b_1\mathbf{A} + \cdots + b_{N-1}\mathbf{A}^{N-1} = \sum_{m=0}^{N-1} b_m\mathbf{A}^m \tag{A.57}$$

类似地，如果 λ 是 A 的特征值，则 $f(\lambda)$ 也可以表示为

$$f(\lambda) = b_0 + b_1\lambda + \cdots + b_{N-1}\lambda^{N-1} = \sum_{m=0}^{N-1} b_m\lambda^m \tag{A.58}$$

因此，如果 A 的所有特征值都是不同的，则系数 $b_m(m=0,1,\cdots,N-1)$ 可以由下列 N 个方程确定：

$$f(\lambda_k) = b_0 + b_1\lambda_k + \cdots + b_{N-1}\lambda_k^{N-1} \qquad k = 1,2,\cdots,N \tag{A.59}$$

如果 A 的所有特征值都是相同的，则式(A.59)不能产生 N 个方程。假设一个特征值 λ_i 重复 r 次，其他特征值都不相同。在这种情况下，对式(A.58)两端取 λ 的微分 r 次，并设 $\lambda = \lambda_i$，则可以得到对应 λ_i 的 r 个方程为

$$\frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} f(\lambda)\bigg|_{\lambda=\lambda_i} = \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}}\left(\sum_{m=0}^{N-1} b_m\lambda^m\right)\bigg|_{\lambda=\lambda_i} \qquad n = 1,2,\cdots,r \tag{A.60}$$

将式(A.59)和(A.60)合起来，可以确定式(A.57)中的所有系数 b_m。

D. A 的最小多项式

一个 $N\times N$ 矩阵 A 的最小多项式 $m(\lambda)$ 是指最低阶次的多项式，该多项式以 1 为其首项系数，满足 $m(\mathbf{A})=\mathbf{0}$。A 满足其特征方程，则 $m(\lambda)$ 的阶次不会大于 N。

例 A.14 设

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{bmatrix}$$

其特征方程为

$$c(\lambda)=|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-\alpha & 0\\ -1 & \lambda-\alpha\end{vmatrix}=(\lambda-\alpha)^2=\lambda^2-2\alpha\lambda+\alpha^2$$

且其最小多项式为

$$m(\lambda)=\lambda-\alpha$$

因为

$$m(\mathbf{A})=\mathbf{A}-\alpha\mathbf{I}=\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{bmatrix}-\alpha\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

注意：

1. $\mathbf{A}$ 的每个特征值都是 $m(\lambda)$ 的零点。

2. 如果 $\mathbf{A}$ 的所有特征值都是不同的，则 $c(\lambda)=m(\lambda)$。

3. $c(\lambda)$ 可以被 $m(\lambda)$ 除。

4. 对于有限次幂的矩阵 $\mathbf{A}$，与 $c(\lambda)$ 一样，可以用 $m(\lambda)$ 来表示。

可以证明，$m(\lambda)$ 可以由下式确定：

$$m(\lambda)=\frac{c(\lambda)}{d(\lambda)}\tag{A.61}$$

其中，$d(\lambda)$ 是 adj$(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})$ 中所有元素的最大公因式。

例 A.15 设

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}5 & -6 & -6\\ -1 & 4 & 2\\ 3 & -6 & -4\end{bmatrix}$$

则

$$c(\lambda)=|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-5 & 6 & 6\\ 1 & \lambda-4 & -2\\ -3 & 6 & \lambda+4\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^3-5\lambda^2+8\lambda-4=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$$

$$\text{adj}[\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}]=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}\lambda-4 & -2\\ 6 & \lambda+4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}6 & 6\\ 6 & \lambda+4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}6 & 6\\ \lambda-4 & -2\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & -2\\ -3 & \lambda+4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}\lambda-5 & 6\\ -3 & \lambda+4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}\lambda-5 & 6\\ 1 & -2\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1 & \lambda-4\\ -3 & 6\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}\lambda-5 & 6\\ -3 & 6\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}\lambda-5 & 6\\ 1 & \lambda-4\end{vmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(\lambda+2)(\lambda-2) & -6(\lambda-2) & -6(\lambda-2)\\ -(\lambda-2) & (\lambda+1)(\lambda-2) & 2(\lambda-2)\\ 3(\lambda-2) & -6(\lambda-2) & (\lambda-2)(\lambda-7)\end{bmatrix}$$

因此，$d(\lambda)=\lambda-2$，且

$$m(\lambda)=\frac{c(\lambda)}{d(\lambda)}=(\lambda-1)(\lambda-2)=\lambda^2-3\lambda+2$$

且

$$m(\mathbf{A})=(\mathbf{A}-\mathbf{I})(\mathbf{A}-2\mathbf{I})=\begin{bmatrix}4 & -6 & -6\\ -1 & 3 & 2\\ 3 & -6 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -6 & -6\\ -1 & 2 & 2\\ 3 & -6 & -6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

E. 谱分解

可以证明,如果一个 $N\times N$ 矩阵 **A** 的最小多项式 $m(\lambda)$ 为

$$m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_i) \tag{A.62}$$

则 **A** 可以表示为

$$\mathbf{A} = \lambda_1\mathbf{E}_1 + \lambda_2\mathbf{E}_2 + \cdots + \lambda_i\mathbf{E}_i \tag{A.63}$$

其中,$\mathbf{E}_j(j=1,2,\cdots,i)$称为构造矩阵,且具有以下性质:

1. $\mathbf{I}=\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2+\cdots+\mathbf{E}_i$
2. $\mathbf{E}_m\mathbf{E}_k=0, m\neq k$ (A.64)
3. $\mathbf{E}_k^2=\mathbf{E}_k$
4. $\mathrm{A}\mathbf{E}_k=\mathbf{E}_k\mathrm{A}=\lambda_k\mathbf{E}_k$

任意一个矩阵 **B**,如果有 $\mathbf{B}^2=\mathbf{B}$,该矩阵称为等幂矩阵。因此,构造矩阵 $\mathbf{E}_j$ 是等幂矩阵。**A** 的特征值集称为 **A** 的谱,式(A.63)称为谱分解。利用式(A.64)中的性质,得

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^2 &= \lambda_1^2\mathbf{E}_1 + \lambda_2^2\mathbf{E}_2 + \cdots + \lambda_i^2\mathbf{E}_i\\ &\vdots\\ \mathbf{A}^n &= \lambda_1^n\mathbf{E}_1 + \lambda_2^n\mathbf{E}_2 + \cdots + \lambda_i^n\mathbf{E}_i\end{aligned} \tag{A.65}$$

且

$$f(\mathbf{A}) = f(\lambda_1)\mathbf{E}_1 + f(\lambda_2)\mathbf{E}_2 + \cdots + f(\lambda_i)\mathbf{E}_i \tag{A.66}$$

构造矩阵 $\mathbf{E}_j$ 是可以计算如下。用部分分式法展开

$$\begin{aligned}\frac{1}{m(\lambda)} &= \frac{1}{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_i)}\\ &= \frac{k_1}{\lambda-\lambda_1} + \frac{k_2}{\lambda-\lambda_2} + \cdots + \frac{k_i}{\lambda-\lambda_i}\end{aligned}$$

得

$$k_j = \frac{1}{\prod\limits_{\substack{m=1\\ m\neq j}}^{i}(\lambda_j - \lambda_m)}$$

则

$$\frac{1}{m(\lambda)} = \frac{k_1g_1(\lambda) + k_2g_2(\lambda) + \cdots + k_ig_i(\lambda)}{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_i)}$$

其中

$$g_j(\lambda) = \prod_{\substack{m=1\\ m\neq j}}^{i}(\lambda - \lambda_m)$$

设 $e_j(\lambda)=k_jg_j(\lambda)$。则构造矩阵 $\mathbf{E}_j$ 可以计算为

$$\mathbf{E}_j = e_j(\mathbf{A}) = \frac{\prod\limits_{\substack{m=1\\ m\neq j}}^{i}(\mathbf{A} - \lambda_m\mathbf{I})}{\prod\limits_{\substack{m=1\\ m\neq j}}^{i}(\lambda - \lambda_m)} \tag{A.67}$$

例 A.16 考虑例 A.15 中的矩阵 **A**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}5 & -6 & -6\\ -1 & 4 & 2\\ 3 & -6 & -4\end{bmatrix}$$

由例 A.15,得

$$m(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

则

$$\frac{1}{m(\lambda)}=\frac{1}{(\lambda-1)(\lambda-2)}=\frac{-1}{\lambda-1}+\frac{1}{\lambda-2}$$

且

$$e_1(\lambda)=-(\lambda-2)\qquad e_2(\lambda)=\lambda-1$$

则

$$\mathbf{E}_1=e_1(\mathbf{A})=-(\mathbf{A}-2\mathbf{I})=\begin{bmatrix}-3 & 6 & 6\\ 1 & -2 & -2\\ -3 & 6 & 6\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{E}_2=e_2(\mathbf{A})=\mathbf{A}-\mathbf{I}=\begin{bmatrix}4 & -6 & -6\\ -1 & 3 & 2\\ 3 & -6 & -5\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}=\lambda_1\mathbf{E}_1+\lambda_2\mathbf{E}_2=\mathbf{E}_1+2\mathbf{E}_2$$

$$=\begin{bmatrix}-3 & 6 & 6\\ 1 & -2 & -2\\ -3 & 6 & 6\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}4 & -6 & -6\\ -1 & 3 & 2\\ 3 & -6 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -6 & -6\\ -1 & 4 & 2\\ 3 & -6 & -4\end{bmatrix}$$

A.8　矩阵的微积分

A. 定义

一个 $m\times n$ 矩阵 $\mathbf{A}(t)$ 的导数也是 $m\times n$ 矩阵，其中的每个元素等于 $\mathbf{A}$ 中所对应元素的导数，即

$$\frac{d}{dt}\mathbf{A}(t)=\left[\frac{d}{dt}a_{ij}(t)\right]_{m\times n}=\begin{bmatrix}\frac{d}{dt}a_{11}(t) & \frac{d}{dt}a_{12}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{1n}(t)\\ \frac{d}{dt}a_{21}(t) & \frac{d}{dt}a_{22}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{2n}(t)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{d}{dt}a_{m1}(t) & \frac{d}{dt}a_{m2}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{mn}(t)\end{bmatrix}\tag{A.68}$$

同样，一个 $m\times n$ 矩阵 $\mathbf{A}(t)$ 的积分为

$$\int\mathbf{A}(t)dt=\left[\int a_{ij}(t)dt\right]_{m\times n}=\begin{bmatrix}\int a_{11}(t)dt & \int a_{12}(t)dt & \cdots & \int a_{1n}(t)dt\\ \int a_{21}(t)dt & \int a_{22}(t)dt & \cdots & \int a_{2n}(t)dt\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \int a_{m1}(t)dt & \int a_{m2}(t)dt & \cdots & \int a_{mn}(t)dt\end{bmatrix}\tag{A.69}$$

例 A.17　设

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}t & t^2\\ 1 & t^3\end{bmatrix}$$

则

$$\frac{d}{dt}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dt}t & \frac{d}{dt}t^2 \\ \frac{d}{dt}1 & \frac{d}{dt}t^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2t \\ 0 & 3t^2 \end{bmatrix}$$

且

$$\int_0^1 \mathbf{A}dt = \begin{bmatrix} \int_0^1 tdt & \int_0^1 t^2 dt \\ \int_0^1 1dt & \int_0^1 t^3 dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

B. 两矩阵乘积的微分

如果矩阵 $\mathbf{A}(t)$和 $\mathbf{A}(t)$都是可微的,则

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{A}(t)\mathbf{B}(t)] = \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt}\mathbf{B}(t) + \mathbf{A}(t)\frac{d\mathbf{B}(t)}{dt} \tag{A.70}$$

附录 B　线性时不变系统及各变换的性质

B.1　连续时间 LTI 系统

单位冲激响应：$h(t)$

卷积：$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

因果性：$h(t)<0, t<0$

稳定性：$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty$

B.2　拉普拉斯变换

双边拉普拉斯变换

定义：

$$x(t) \overset{\mathscr{L}}{\longleftrightarrow} X(s)$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s)e^{st}ds$$

双边拉普拉斯变换的性质：

线性：$a_1x_1(t) + a_2x_2(t) \longleftrightarrow a_1X_1(s) + a_2X_2(s), R' \supset R_1 \cap R_2$

时间平移：$x(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-st_0}X(s), R' = R$

s 域平移：$e^{s_0t}x(t) \longleftrightarrow X(s-s_0), R' = R + \mathrm{Re}(s_0)$

时间比例：$x(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|}X\left(\frac{s}{a}\right), R' = aR$

时间翻转：$x(-t) \longleftrightarrow X(-s), R' = -R$

时域微分：$\frac{dx(t)}{dt} \longleftrightarrow sX(s), R' \supset R$

s 域微分：$-tx(t) \longleftrightarrow \frac{dX(s)}{ds}, R' = R$

时域积分：$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \longleftrightarrow \frac{1}{s}X(s), R' \supset R \cap \{\mathrm{Re}(s) > 0\}$

卷积：$x_1(t) * x_2(t) \longleftrightarrow X_1(s)X_2(s), R' \supset R_1 \cap R_2$

部分拉普拉斯变换对：

$\delta(t) \longleftrightarrow 1$，对所有 s

$u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s}, \mathrm{Re}(s) > 0$

$-u(-t) \longleftrightarrow \frac{1}{s}, \mathrm{Re}(s) < 0$

$tu(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s^2}, \mathrm{Re}(s) > 0$

$t^k u(t) \longleftrightarrow \frac{k!}{s^{k+1}}, \mathrm{Re}(s) > 0$

$$e^{-at}u(t)\longleftrightarrow\frac{1}{s+a},\mathrm{Re}(s)>-\mathrm{Re}(a)$$

$$-e^{-at}u(-t)\longleftrightarrow\frac{1}{s+a},\mathrm{Re}(s)<-\mathrm{Re}(a)$$

$$te^{-at}u(t)\longleftrightarrow\frac{1}{(s+a)^2},\mathrm{Re}(s)>-\mathrm{Re}(a)$$

$$-te^{-at}u(-t)\longleftrightarrow\frac{1}{(s+a)^2},\mathrm{Re}(s)<-\mathrm{Re}(a)$$

$$\cos\omega_0 tu(t)\longleftrightarrow\frac{s}{s^2+\omega_0^2},\mathrm{Re}(s)>0$$

$$\sin\omega_0 tu(t)\longleftrightarrow\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2},\mathrm{Re}(s)>0$$

$$e^{-at}u(t)\cos\omega_0 tu(t)\longleftrightarrow\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2},\mathrm{Re}(s)>-\mathrm{Re}(a)$$

$$e^{-at}u(t)\sin\omega_0 tu(t)\longleftrightarrow\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2},\mathrm{Re}(s)>-\mathrm{Re}(a)$$

单边拉普拉斯变换

定义：

$$x(t)\overset{\mathscr{L}_I}{\longleftrightarrow}X_I(s)$$

$$X_I(s)=\int_{0^-}^{\infty}x(t)e^{-st}dt\qquad 0^-=\lim_{\varepsilon\to 0}(0-\varepsilon)$$

部分特殊性质：

时域微分：

$$\frac{dx(t)}{dt}\longleftrightarrow sX_I(s)-x(0^-)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}\longleftrightarrow s^2X_I(s)-sx(0^-)-x'(0^-)$$

$$\frac{d^nx(t)}{dt^n}\longleftrightarrow s^nX_I(s)-s^{n-1}x(0^-)-s^{n-2}x'(0^-)-\cdots-x^{(n-1)}(0^-)$$

时域积分：

$$\int_{0^-}^{t}x(\tau)d\tau\longleftrightarrow\frac{1}{s}X_I(s)$$

$$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau\longleftrightarrow\frac{1}{s}X_I(s)+\frac{1}{s}\int_{-\infty}^{0^-}x(\tau)d\tau$$

初值定理：$x(0^-)=\lim_{s\to\infty}sX_I(s)$

终值定理：$\lim_{t\to\infty}x(t)=\lim_{s\to 0}sX_I(s)$

B.3　傅里叶变换

定义：

$$x(t)\overset{\mathscr{F}}{\longleftrightarrow}X(\omega)$$

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{j\infty}^{j\infty}X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

傅里叶变换的性质：

线性：$a_1x_1(t)+a_2x_2(t)\leftrightarrow a_1X_1(\omega)+a_2X_2(\omega)$

时间平移：$x(t-t_0)\leftrightarrow e^{-j\omega t_0}X(\omega)$

频率平移：$e^{j\omega_0 t}x(t)\leftrightarrow X(\omega-\omega_0)$

时间比例：$x(at)\leftrightarrow\frac{1}{|a|}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$

时间翻转：$x(-t)\leftrightarrow X(-\omega)$

对偶：$X(t)\leftrightarrow 2\pi x(-\omega)$

时域微分：$\frac{dx(t)}{dt}\leftrightarrow j\omega X(\omega)$

频率微分：$(-jt)x(t)\leftrightarrow\frac{dX(\omega)}{d\omega}$

积分：$\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau\leftrightarrow\pi X(0)\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}X(\omega)$

卷积：$x_1(t)*x_2(t)\leftrightarrow X_1(\omega)X_2(\omega)$

乘积：$x_1(t)x_2(t)\leftrightarrow\frac{1}{2\pi}X_1(\omega)*X_2(\omega)$

实信号：$x(t)=x_e(t)+x_o(t)\leftrightarrow X(\omega)=A(\omega)+jB(\omega)$

$$X(-\omega)=X^*(\omega)$$

偶部分：$x_e(t)\leftrightarrow \mathrm{Re}[X(\omega)]=A(\omega)$

奇部分：$x_o(t)\leftrightarrow j\,\mathrm{Im}[X(\omega)]=jB(\omega)$

帕斯瓦尔(Parseval)关系：

$$\int_{-\infty}^{\infty}x_1(\lambda)X_2(\lambda)d\lambda=\int_{-\infty}^{\infty}X_1(\lambda)x_2(\lambda)d\lambda$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}x_1(t)x_2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X_1(\omega)X_2(-\omega)d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|X(\omega)|^2d\omega$$

常用傅里叶变换对：

$\delta(t)\leftrightarrow 1$

$\delta(t-t_0)\leftrightarrow e^{-j\omega t_0}$

$1\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$

$e^{j\omega_0 t}\leftrightarrow\delta(\omega-\omega_0)$

$\cos\omega_0 t\leftrightarrow\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$

$\sin\omega_0 t u(t)\leftrightarrow j\pi[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]$

$u(t)\leftrightarrow\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$

$u(-t)\leftrightarrow\pi\delta(\omega)-\frac{1}{j\omega}$

$e^{-at}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{j\omega+a},a>0$

$te^{-at}u(t)\leftrightarrow\frac{1}{(j\omega+a)^2},a>0$

$e^{-a|t|}\leftrightarrow\frac{2a}{a^2+\omega^2},a>0$

$\frac{1}{a^2+t^2}\leftrightarrow e^{-a|\omega|}$

$$e^{-at^2} \longleftrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\omega^2/4a}, a>0$$

$$p_a(t)=\begin{cases}1 & |t|<a \\ 0 & |t|>a\end{cases} \longleftrightarrow 2a\,\frac{\sin\omega a}{\omega a}$$

$$\frac{\sin at}{\pi t} \longleftrightarrow p_a(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|<a \\ 0 & |\omega|>a\end{cases}$$

$$\mathrm{sgn}t \longleftrightarrow \frac{2}{j\omega}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT) \longleftrightarrow \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_0), \omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

B.4　离散时间 LTI 系统

单位冲激响应：$h[n]$

卷积：$y[n]=x[n]*h[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]$

因果性：$h[n]<0, n<0$

稳定性：$\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h[n]|dt<\infty$

B.5　z 变换

双边 z 变换

定义：

$$x[n] \overset{\mathcal{Z}}{\longleftrightarrow} X(z)$$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}$$

$$x[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}dz$$

双边 z 变换的性质：

线性：$a_1x_1[n]+a_2x_2[n] \longleftrightarrow a_1X_1(z)+a_2X_2(z), R' \supset R_1 \cap R_2$

时间平移：$x[n-n_0] \longleftrightarrow z^{-n_0}X(z), R' \supset \{0<|z|<\infty|$

乘以 z_0^n：$z_0^n x[n] \longleftrightarrow X\left(\frac{z}{z_0}\right), R'=|z_0|R$

乘以 $e^{j\Omega_0 n}$：$e^{j\Omega_0 n}x[n] \longleftrightarrow X(e^{-j\Omega_0}z), R'=R$

时间翻转：$x[-n] \longleftrightarrow X\left(\frac{1}{z}\right), R'=\frac{1}{R}$

乘以 n：$nx[n] \longleftrightarrow -z\frac{dX(z)}{dz}, R'=R$

累加：$\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}X(z), R' \supset R \cap \{|z|>1|$

卷积：$x_1[n]*x_2[n] \longleftrightarrow X_1(z)X_2(z), R' \supset R_1 \cap R_2$

部分 z 变换对：

$\delta[n] \longleftrightarrow 1$，对所有 z

$$u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1}, |z|>1$$

$$-u[-n-1] \longleftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{z}{z-1}, |z|<1$$

$\delta[n-m] \longleftrightarrow z^{-m}$，对所有 z，但 $m>0$ 时 0 除外，$m<0$ 时 ∞ 除外

$$a^n u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, |z| > |a|$$

$$-a^n u[-n-1] \longleftrightarrow \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}, |z| < |a|$$

$$na^n u[n] \longleftrightarrow \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} = \frac{az}{(z-a)^2}, |z| > |a|$$

$$-na^n u[-n-1], \longleftrightarrow \frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2} = \frac{az}{(z-a)^2}, |z| < |a|$$

$$(n+1)a^n u[n] \longleftrightarrow \frac{1}{(1-az^{-1})^2} = \left[\frac{z}{z-a}\right]^2, |z| > |a|$$

$$(\cos\Omega_0 n)u[n] \longleftrightarrow \frac{z^2-(\cos\Omega_0)z}{z^2-(2\cos\Omega_0)z+1}, |z| > 1$$

$$(\sin\Omega_0 n)u[n] \longleftrightarrow \frac{(\sin\Omega_0)z}{z^2-(2\cos\Omega_0)z-1}, |z| > 1$$

$$(r^n \cos\Omega_0 n)u[n] \longleftrightarrow \frac{z^2-(r\cos\Omega_0)z}{z^2-(2r\cos\Omega_0)z+r^2}, |z| > r$$

$$(r^n \sin\Omega_0 n)u[n] \longleftrightarrow \frac{(r\sin\Omega_0)z}{z^2-(2r\cos\Omega_0)z+r^2}, |z| > r$$

$$\begin{cases} a^n & 0 \leqslant n \leqslant N-1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \longleftrightarrow \frac{1-a^N z^{-N}}{1-az^{-1}}, |z| > 0$$

单边 z 变换

定义：

$$x(t) \longleftrightarrow X_I(z)$$

$$X_I(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

部分特殊性质：

时域平移性质：

$$x[n-m] \longleftrightarrow z^{-m}X_I(z) + z^{-m+1}x[-1] + z^{-m+2}x[-2] + \cdots + x[-m]$$

$$x[n+m] \longleftrightarrow z^m X_I(z) - z^m x[0] - z^{m-1}x[1] - \cdots - zx[m-1]$$

初值定理：$x[0] = \lim_{z \to \infty} X(z)$

终值定理：$\lim_{N \to \infty} x[N] = \lim_{z \to 1}(1-z^{-1})X(z)$

B.6　离散时间傅里叶变换

定义：

$$x[n] \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} X(\Omega)$$

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-j\Omega n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega$$

傅里叶变换的性质：

周期性：$x[n] \longleftrightarrow X(\Omega) = X(\Omega + 2\pi)$

线性：$a_1x_1[n] + a_2x_2[n] \longleftrightarrow a_1X_1(\Omega) + a_2X_2(\Omega)$

时间平移：$x[n-n_0] \longleftrightarrow e^{-j\Omega n_0}X(\Omega)$

频率平移：$e^{j\Omega_0 n}x[n] \longleftrightarrow X(\Omega - \Omega_0)$

共轭：$x^*[n] \leftrightarrow X^*(-\Omega)$

时间翻转：$x[-n] \leftrightarrow X(-\Omega)$

时间比例：$x_{(m)}[n]=\begin{cases}x[n/m] & n=km\\ 0 & n\neq km\end{cases} \leftrightarrow X(m\Omega)$

频率微分：$nx[n] \leftrightarrow j\dfrac{dX(\Omega)}{d\Omega}$

一阶差分：$x[n]-x[n-1] \leftrightarrow (1-e^{-j\Omega})X(\Omega)$

累加：$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \leftrightarrow \pi X(0)\delta(\Omega)+\dfrac{1}{1-e^{-j\Omega}}X(-\Omega)$

卷积：$x_1[n]*x_2[n] \leftrightarrow X_1(\Omega)X_2(\Omega)$

乘积：$x_1[n]x_2[n] \leftrightarrow \dfrac{1}{2\pi}X_1(\Omega)\otimes X_2(\Omega)$

实信号：$x[n]=x_e[n]+x_o[n] \leftrightarrow X(\Omega)=A(\Omega)+jB(\Omega)$

$$X(-\Omega)=X^*(\Omega)$$

偶部分：$x_e[n] \leftrightarrow \mathrm{Re}[X(\Omega)]=A(\Omega)$

奇部分：$x_o[n] \leftrightarrow j\mathrm{Im}[X(\Omega)]=jB(\Omega)$

帕斯瓦尔(Parseval)关系：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]x_2[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(\Omega)X_2(-\Omega)d\Omega$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(\Omega)|^2 d\Omega$$

常用傅里叶变换对：

$\delta[n] \leftrightarrow 1$

$\delta[n-n_0] \leftrightarrow e^{-j\Omega n_0}$

$\delta[n]=1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega),\ |\Omega|\leqslant\pi$

$e^{j\Omega_0 n} \leftrightarrow 2\pi\delta(\Omega-\Omega_0),\ |\Omega|,\ |\Omega_0|\leqslant\pi$

$\cos\Omega_0 n \leftrightarrow \pi[\delta(\Omega-\Omega_0)+\delta(\Omega+\Omega_0)],\ |\Omega|,\ |\Omega_0|\leqslant\pi$

$\sin\Omega_0 n \leftrightarrow -j\pi[\delta(\Omega-\Omega_0)-\delta(\Omega+\Omega_0)],\ |\Omega|,\ |\Omega_0|\leqslant\pi$

$u[n] \leftrightarrow \pi\delta(\Omega)+\dfrac{1}{1-e^{-j\Omega}},\ |\Omega|\leqslant\pi$

$-u[-n-1] \leftrightarrow -\pi\delta(\Omega)+\dfrac{1}{1-e^{-j\Omega}},\ |\Omega|\leqslant\pi$

$a^n u[n] \leftrightarrow \dfrac{1}{1-ae^{-j\Omega}},\ |a|<1$

$-a^n u[-n-1] \leftrightarrow \dfrac{1}{1-ae^{-j\Omega}},\ |a|>1$

$(n+1)a^n u[n] \leftrightarrow \dfrac{1}{(1-ae^{-j\Omega})^2},\ |a|<1$

$a^{|n|} \leftrightarrow \dfrac{1-a^2}{1-2a\cos\Omega+a^2},\ |a|<1$

$$x[n]=\begin{cases}1 & |n|\leqslant N_1\\ 0 & |n|>N_1\end{cases} \leftrightarrow \frac{\sin\left[\Omega\left(N_1+\frac{1}{2}\right)\right]}{\sin(\Omega/2)}$$

$$\frac{\sin Wn}{\pi n}(0<W<\pi) \leftrightarrow X(\Omega)=\begin{cases}1 & 0\leqslant|\Omega|\leqslant W\\ 0 & W<|\Omega|\leqslant\pi\end{cases}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-kN_0] \leftrightarrow \Omega_0\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega-k\Omega_0),\ \Omega_0=\frac{2\pi}{N_0}$$

B.7 离散傅里叶变换

定义：

$$x[n]=0 \quad 0\leqslant n\leqslant N-1 \text{ 范围之外}$$

$$x[n]\xleftrightarrow{\text{DFT}}X[k]$$

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]W_N^{kn} \qquad k=0,1,\cdots,N-1 \qquad W_N=e^{-j(2\pi/N)}$$

$$x[n]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}X[k]W_N^{-kn} \qquad n=0,1,\cdots,N-1$$

DFT(离散傅里叶变换)的性质：

线性：$a_1x_1[n]+a_2x_2[n]\leftrightarrow a_1X_1[k]+a_2X_2[k]$

时间平移：$x[n-n_0]_{\text{mod }N}\leftrightarrow W_N^{kn_0}X[k]$

频率平移：$W_N^{-kn_0}x[n]\leftrightarrow X[k-k_0]_{\text{mod }N}$

共轭：$x^*[n]\leftrightarrow X^*[-k]_{\text{mod}N}$

时间翻转：$x[-n]_{\text{mod}N}\leftrightarrow X[-k]_{\text{mod}N}$

对偶：$X[n]\leftrightarrow Nx[-k]_{\text{mod}N}$

圆周卷积：$x_1[n]\otimes x_2[n]\leftrightarrow X_1[k]X_2[k]$

乘积：$x_1[n]x_2[n]\leftrightarrow\frac{1}{N}X_1[k]\otimes X_2[k]$

实序列：$x[n]=x_e[n]+x_o[n]\leftrightarrow X[k]=A[k]+jB[k]$

$$X[-k]_{\text{mod}N}=X^*[k]$$

偶部分：$x_e[n]\leftrightarrow\text{Re}\{X[k]\}=A[k]$

奇部分：$x_o[n]\leftrightarrow j\text{Im}\{X[k]\}=jB[k]$

帕斯瓦尔(Parseval)关系：

$$\sum_{n=0}^{N-1}|x[n]|^2=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|x[k]|^2$$

注意

$$x_1[n]\otimes x_2[n]=\sum_{i=0}^{N-1}x_1[i]x_2[n-i]_{\text{mod}N}$$

B.8 傅里叶级数

$$x(t+T_0)=x(t)$$

复指数傅里叶级数：

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_ke^{jk\omega_0t} \qquad \omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$$

$$c_k=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}x(t)e^{-jk\omega_0t}dt$$

三角型傅里叶级数：

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\omega_0t+b_k\sin k\omega_0t)$$

$$a_k=\frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}x(t)\cos k\omega_0tdt$$

$$b_k=\frac{2}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}x(t)\sin k\omega_0tdt$$

谐波型傅里叶级数：

$$x(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cos(k\omega_0 t - \theta_k) \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

各种傅里叶系数之间的关系：

$$\frac{a_0}{2} = c_0 \quad a_k = c_k + c_{-k} \quad b_k = j(c_k - c_{-k})$$

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - jb_k) \quad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + jb_k)$$

$$C_0 = \frac{a_0}{2} \quad C_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad \theta_k = \tan^{-1}\frac{b_k}{a_k}$$

傅里叶级数的帕斯瓦尔(Parseval)定理：

$$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

B.9　离散傅里叶级数

$$x[n + N_0] = x[n]$$

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N_0-1} c_k e^{jk\Omega_0 n} \quad \Omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$$

$$c_k = \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{-jk\Omega_0 n}$$

离散傅里叶级数的帕斯瓦尔(Parseval)定理：

$$\frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} |x[n]|^2 = \sum_{k=0}^{N_0-1} |c_k|^2$$

附录 C 复数复习

C.1 复数的表示

复数 z 可以用多种方法表示。

1. 直角坐标形式

$$z = a + jb \tag{C.1}$$

其中，$j = \sqrt{-1}$，a 和 b 是实数，表示 z 的实部和虚部。a 和 b 常表示为

$$a = \mathrm{Re}\{z\} \qquad b = \mathrm{Im}\{z\} \tag{C.2}$$

其中，Re 表示实部，Im 表示虚部。

2. 极坐标形式

$$z = re^{j\theta} \tag{C.3}$$

其中，$r>0$ 是 z 的幅度，是 z 的角度或相位。r 和 θ 常写为

$$r = |z| \qquad \theta = \angle z \tag{C.4}$$

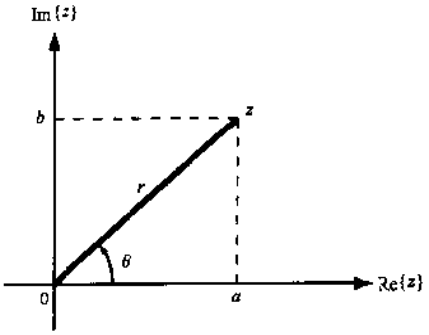


图 C-1

图 C-1 是 z 的图形表示方式。利用 Euler 公式，

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \tag{C.5}$$

或者由图 C-1 得到 z 的直角坐标与极坐标表示形式之间的关系为

$$a = r\cos\theta \qquad b = r\sin\theta \tag{C.6a}$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \theta = \arctan\frac{b}{a} \tag{C.6b}$$

C.2 加法、乘法和除法

如果 $z_1 = a_1 + jb_1$，$z_2 = a_2 + jb_2$，则

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2) \tag{C.7}$$

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_1 b_2 + b_1 a_2) \tag{C.8}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2)}{(a_2 + jb_2)(a_2 - jb_2)}$$

$$= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + j(-a_1 b_2 + b_1 a_2)}{a_2^2 + b_2^2} \tag{C.9}$$

如果 $z_1 = r_1 e^{j\theta_1}$，$z_2 = r_2 e^{j\theta_2}$，则

$$z_1 z_2 = (r_1 r_2) e^{j(\theta_1 + \theta_2)} \tag{C.10}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right) e^{j(\theta_1 - \theta_2)} \tag{C.11}$$

C.3 共轭复数

z 的共轭复数用 z^* 表示，为

$$z^* = a - jb = re^{-j\theta} \tag{C.12}$$

常用关系：

1. $zz^* = r^2$

2. $\dfrac{z}{z^*} = e^{j2\theta}$

3. $z+z^*=2\mathrm{Re}\{z\}$
4. $z-z^*=j2\mathrm{Im}\{z\}$
5. $(z_1+z_2)^*=z_1^*+z_2^*$
6. $(z_1z_2)^*=z_1^*z_2^*$
7. $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^*=\frac{z_1^*}{z_2^*}$

C.4 复数的幂和根

复数 $z=re^{j\theta}$ 的 n 次幂为

$$z^n = r^n e^{jn\theta} = r^n(\cos n\theta + j\sin n\theta) \tag{C.13}$$

由此可得到 DeMoivre 关系

$$(\cos\theta + j\sin\theta)^n = \cos n\theta + j\sin n\theta \tag{C.14}$$

复数 z 的 n 次根是一个满足下式的数：

$$w^n = z = re^{j\theta} \tag{C.15}$$

因此，要求出复数 z 的 n 次根，可以解

$$w^n - re^{j\theta} = 0 \tag{C.16}$$

这是一个 n 阶方程，有 n 个根，为

$$w_k = r^{1/n}e^{j[\theta+2(k-1)\pi]/n} \quad k = 1,2,\cdots,n \tag{C.17}$$

附录 D　有用的数学公式

D.1　求和公式

$$\sum_{n=0}^{N-1}\alpha^n=\begin{cases}\dfrac{1-\alpha^N}{1-\alpha} & \alpha\neq 1\\ N & \alpha=1\end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n=\frac{1}{1-\alpha}\qquad |\alpha|<1$$

$$\sum_{n=k}^{\infty}\alpha^n=\frac{\alpha^k}{1-\alpha}\qquad |\alpha|<1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}n\alpha^n=\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}\qquad |\alpha|<1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}n^2\alpha^n=\frac{\alpha^2+\alpha}{(1-\alpha)^3}\qquad |\alpha|<1$$

D.2　Euler 公式

$$e^{\pm j\theta}=\cos\theta\pm j\sin\theta$$

$$\cos\theta=\frac{1}{2}(e^{j\theta}+e^{-j\theta})$$

$$\sin\theta=\frac{1}{2}(e^{j\theta}-e^{-j\theta})$$

D.3　三角恒等式

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

$$\sin^2\theta=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$$

$$\cos^2\theta=\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$$

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$$

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=1-2\cos^2\theta$$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)]$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$a\cos\alpha+b\sin\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\cos\left(\alpha-\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$$

D.4 幂级数展开

$$e^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} = 1 + \alpha + \frac{1}{2!}\alpha^2 + \frac{1}{3!}\alpha^3 + \cdots$$

$$(1+\alpha)^n = 1 + n\alpha + \frac{n(n-1)}{2!}\alpha^2 + \cdots + \binom{n}{k}\alpha^k + \cdots + \alpha^n$$

$$\ln(1+\alpha) = \alpha - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{3}\alpha^3 - \cdots + \frac{(-1)^{k+1}}{k}\alpha^k + \cdots \quad |\alpha| < 1$$

D.5 指数和对数函数

$$e^{\alpha}e^{\beta} = e^{\alpha+\beta}$$

$$\frac{e^{\alpha}}{e^{\beta}} = e^{\alpha-\beta}$$

$$\ln(\alpha\beta) = \ln\alpha + \ln\beta$$

$$\ln\frac{\alpha}{\beta} = \ln\alpha - \ln\beta$$

$$\ln\alpha^{\beta} = \beta\ln\alpha$$

$$\log_b N = \log_a N \log_b a = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

D.6 部分无限积分

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \qquad a > 0$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad a > 0$$

$$\int_0^{\infty} x e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a} \qquad a > 0$$